Nombres premiers

Table des matières

1 Définition et conséquences

1.1 Définition

Définition 1 : Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même

Remarque : :

- 1 n'est pas un nombre premier (il n'a qu'un seul diviseur)
- Un nombre premier p est un naturel supérieur ou égal à 2.
- À part 2, tous les nombres premiers sont impairs.
- Il y a 25 nombres premiers inférieurs à 100 :
  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97

1.2 Critère d'arrêt ou test de primalité

Théorème 1 : Tout entier naturel n tel que $n \geqslant 2$ admet un diviseur premier.
Si n n'est pas premier, alors il admet un diviseur premier p tel que : $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$

Démonstration :

- Si n est premier, il admet donc un diviseur premier : lui-même.
- Si n n'est pas premier, l'ensemble D des diviseurs stricts de n n'est pas vide. D'après le principe du bon ordre, D admet donc un plus petit élément p.
  Si p n'était pas premier, il admettrait un diviseur strict d qui diviserait n. Ceci est impossible car p est le plus petit élément de D. Donc p est premier.
  n admet donc un diviseur premier p tel que $p \geqslant 2$ et $n = p \times q$ avec $p \leqslant q$.
  En multipliant cette inégalité par p, on a : $p^2 \leqslant pq \Leftrightarrow p^2 \leqslant n$ soit $p \leqslant \sqrt{n}$

Exemple : Montrer que 109 est un nombre premier. On a $10 < \sqrt{109} < 11$.
On teste tous les nombres premiers strictement inférieurs à 11, soit : 2, 3, 5 et 7.
D'après règles de divisibilité 109 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
$109 = 7 \times 15 + 4$ donc 109 n'est donc pas divisible par 7.
109 non divisible par 2, 3, 5, et 7 d'après le critère d'arrêt 109 est premier.

Algorithme :

La fonction Python prime(n) détermine avec le critère d'arrêt la primalité du nombre n. Si n n'est pas premier, prime(n) affiche son plus petit facteur.

On teste si n est divisible par 2, puis les diviseurs impairs par ordre croissant tant que ceux-ci sont inférieurs à $\sqrt{n}$.

- prime(527) $\rightarrow$ 527 divisible par 17
- prime(719) $\rightarrow$ 719 premier

```
def prime(n):
    i=2
    if n%i==0:
        return n,"div. par",i
    i+=1
    while i**2<=n:
        if n%i==0:
            return n,"div. par",i
        i+=2
    return n,"premier"
```

1.3 Infinité des nombres premiers

Théorème 2 : Il existe une infinité de nombres premiers

Démonstration : Par l'absurde.
Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers : $p_1 > p_2 > \cdots > p_n$.
Posons $N = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$

- $N \geqslant 2$ et $N > p_n$ donc par construction N n'est pas premier.
- D'après le critère d'arrêt, N admet un diviseur premier p_i parmi $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
- p_i divise donc $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ et N.
  p_i divise donc la différence $N - (p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n) = 1$ et donc $p_i = 1$
- Ceci est contradictoire car $p_i \geqslant 2$

L'hypothèse qu'il existe un nombre fini de nombres premiers est donc à rejeter.

1.4 Crible d'Ératosthène

Théorème 3 : Dresser la liste des nombres premiers entre 2 et n.

La méthode du **crible d'Ératosthène** consiste à :

- écrire la liste des nombres entiers de 2 à n ;
- éliminer successivement les multiples distincts de 2, de 3... puis ceux de p, où p est le premier nombre non encore éliminé, etc.
- D'après le critère d'arrêt, on élimine les multiples jusqu'à $\sqrt{n}$, tous ceux non éliminés sont alors premiers.

Exemple : Dresser la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 150.
Les entiers éliminés (en gris) sont les entiers non premiers entre 2 et 150. Les entiers restant (sur fond jaune) sont donc premiers.

	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100
101	102	**103**	104	105	106	**107**	108	**109**	110
111	112	**113**	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	**127**	128	129	130
131	132	133	134	135	136	**137**	138	**139**	140
141	142	143	144	145	146	147	148	**149**	150

- Pour éliminer, par exemple, les multiples propre de 7, commencer par 7^2, car les multiples inférieurs ont déjà été éliminés.
- $12 < \sqrt{150} < 13$, donc tous les entiers non premiers seront éliminés en tant que multiples propres de 2, 3, 5, 7 et 11.

Algorithme : Soit la fonction Python crible(n) qui donne la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à n ainsi que leur nombre.

```
from math import *
def crible(n):
    L=[i for i in range(n+1)]
    for i in range(2,int(floor(sqrt(n)))+1):
        if L[i]>=1:
            for k in range(2,int(floor(n/i))+1):
                L[i*k]=0
    i=0
    while i<len(L):
        if L[i]==0 or L[i]==1:
           L.remove(L[i])
        else:
            i+=1
    print(L,len(L))
```

- On détermine une liste L des nombre de 0 à n
- Pour un élément de rang i de la liste L entre le rang 2 et le rang de la partie entière de $\sqrt{n}$, si l'élément est différent de 0 ($\geqslant 1$) on met à 0 les éléments de L dont le rang est un multiple propre de i.
- On enlève ensuite de L tous les éléments nuls ou égaux à 1.
- On affiche L et le nombre d'éléments de L.

crible(500) = [2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499] 95

1.5 Divisibilité et nombres premiers

Théorème 4 : Théorème de Gauss et nombre premier

Si un nombre premier divise un produit de facteurs, il divise l'un de ces facteurs.

$$p \text{ divise } ab \quad \Rightarrow \quad p \text{ divise } a \text{ ou } p \text{ divise } b$$

Démonstration : Soit $D = \text{pgcd}(a, p)$, comme p premier alors $D = 1$ ou $D = p$

- Si $D = 1$ d'après le théorème de Gauss, p divise b
- Si $D = p$ alors p divise a

Remarque :

- Si p premier divise a^k, alors p divise a, donc p^k divise a^k avec $k \in \mathbb{N}$.
- Si p premier divise un produit de facteurs premiers, alors p est l'un d'eux.

1.6 Nombres de Mersenne

Définition 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les nombres M_n par : $M_n = 2^n - 1$.
Les nombres M_n sont appelés **nombres de Mersenne**.

1) Les 6 premiers nombres de Mersenne :

$$M_1 = 2-1 = 1 \qquad M_2 = 4-1 = 3 \qquad M_3 = 8-1 = 7$$
$$M_4 = 16-1 = 15 \qquad M_5 = 32-1 = 31 \qquad M_6 = 64-1 = 63$$

2) Montrons que si n non premier alors M_n non premier.

On rappelle la factorisation standard pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

Si n non premier, alors il existe $d > 1$ tel que : $n = dq$ avec $q > 1$.

Factorisons M_n avec la factorisation standard :

$$M_n = 2^n - 1 \overset{n=dq}{=} (2^d)^q - 1 = (2^d - 1)[(2^d)^{q-1} + (2^d)^{q-2} + \cdots + 2^d + 1]$$

$1 < 2^d - 1 < M_n$, donc $(2^d - 1)$ diviseur propre de M_n et donc M_n non premier.

La **contraposée** donne alors : « si M_n premier alors n premier. »

3) Montrons que la réciproque « si n premier alors M_n premier » est fausse.

Contre-exemple :
si $n = 11$ premier alors $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2\,047 = 23 \times 89$ non premier.

Remarque : Dans la pratique, pour trouver un grand nombre premier, on peut utiliser un nombre de Mersenne avec n premier mais l'on doit cependant tester si M_n est premier car la réciproque 3) n'est pas vrai.
Actuellement le plus grand nombre de Mersenne premier est $M_{82\,589\,933}$ trouvé en 2018 qui possède 24 862 048 chiffres !

2 Décomposition, diviseurs d'un entier

2.1 Théorème fondamental de l'arithmétique

Théorème 5 : Tout entier $n \geqslant 2$, peut se décomposer de façon unique (à l'ordre des facteurs près) en produit de facteurs premiers. Soit m nombres premiers distincts $p_1, p_2, \ldots, p_m$ et m entiers naturels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, alors

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_m^{\alpha_m}$$

Démonstration : Montrons par récurrence que :

tout entier $n \geqslant 2$ admet une décomposition en facteurs premiers.

Initialisation : $n = 2$. L'entier 2 étant premier, il se décompose en lui-même.
La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \geqslant 2$, on suppose que tout entier jusqu'à n se décompose en facteurs premiers (HR). Montrons qu'il en est de même pour $n+1$.

- Soit $n+1$ est premier, il se décompose alors en lui-même.
- Soit $n+1$ est non premier, il admet alors un diviseur strict $d \geqslant 2$.

  On a alors $n+1 = dq$ avec $d \leqslant n$ et $q \leqslant n$, les facteurs d et q d'après HR se décomposent en facteurs premiers et donc par produit $n+1$ aussi.

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, tout entier $n \geqslant 2$ admet une décomposition en facteurs premiers.

Remarque :

- Lorsque, dans un raisonnement par récurrence, on suppose, dans l'hérédité, la proposition vraie jusqu'au rang n, on dit que la **récurrence est forte**.
- Pour montrer l'unicité à l'ordre des facteurs près, on utilise également une récurrence forte. On admettra l'unicité de cette décomposition.

Exemple : Décomposons 16 758 en produit de facteur premier :

16 758	2
8 379	3
2 793	3
931	7
133	7
19	19
1	

Pour décomposer un entier, on effectue des divisions successives par des nombres premiers dans l'ordre croissant.

on a donc $16\,758 = 2 \times 3^2 \times 7^2 \times 19$

Algorithme : La fonction Python facteur(n) donne la décomposition en facteurs premiers de $n \geqslant 2$.

On teste si d est un diviseur de n en commençant par 2 puis les nombres impairs dans l'ordre croissant en appliquant le critère d'arrêt $d \leqslant \sqrt{n}$. On réinitialise n en prenant le quotient n/d. Le dernier nombre qui ne vérifie pas le critère d'arrêt est alors premier et on le rajoute à la liste des diviseurs.

facteur(16758) = [2, 3, 3, 7, 7, 19]
facteur(77 986 545) = [3, 5, 7, 13, 19, 31, 97]

```
def facteur(n):
    d=2 ; c=1
    L=[]
    while d**2<=n:
        if n%d==0:
            L.append(d)
            n=int(n/d)
        else:
            d+=c ; c=2
    L.append(n)
    return L
```

Application : Calculer pgcd(126, 735) à l'aide de décompositions.

126	2
63	3
21	3
7	7
1	

735	3
245	5
49	7
7	7
1	

$126 = 2 \times 3^2 \times 7$

$735 = 3 \times 5 \times 7^2$

$\text{pgcd}(126, 735) = 3 \times 7 = 21$

2.2 Diviseurs d'un entier

Théorème 6 : Soit $n \geqslant 2$ dont la décomposition en facteurs premiers est :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_m^{\alpha_m}$$

Alors **tout diviseur** d de n a pour décomposition :

$$d = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots \times p_m^{\beta_m} \text{ avec } 0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i \text{ et } i \in [\![1, m]\!]$$

Le **nombre de diviseurs** N est alors : $N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_m + 1)$

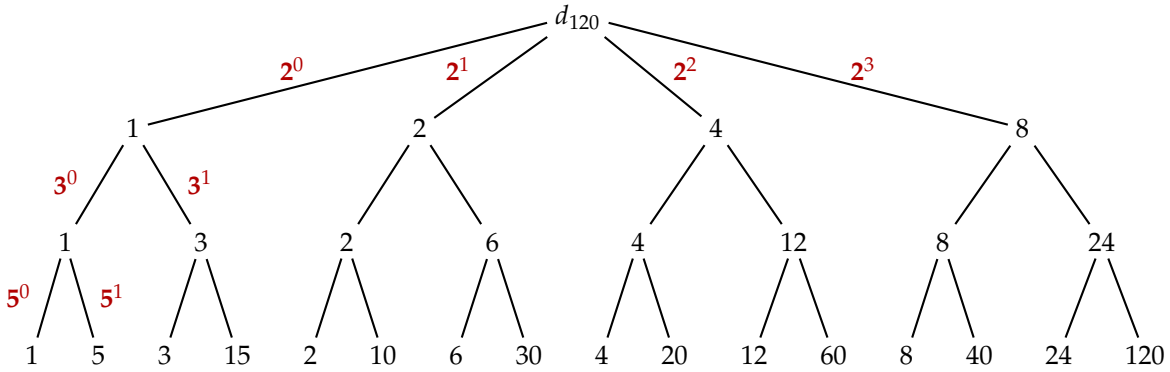
Exemple : Déterminer le nombre de diviseurs de 120 et tous ses diviseurs.

- On décompose 120 en facteurs premiers : $120 = 2^3 \times 3 \times 5$
  On alors : $(3+1)(1+1)(1+1) = 4 \times 2 \times 2 = 16$. Donc 120 a 16 diviseurs.

- Pour déterminer tous ces diviseurs, on peut utiliser un tableau double entrée en séparant les puissance de 2 et les puissance de 3 et 5. On obtient alors :

$\times$	2^0	2^1	2^2	2^3
$3^0 5^0$	1	2	4	8
$3^1 5^0$	3	6	12	24
$3^0 5^1$	5	10	20	40
$3^1 5^1$	15	30	60	120

- On peut utiliser un arbre pondéré dont les poids sont les facteurs premiers.



- Les diviseurs de 120 sont : $D_{120} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$.

2.3 Applications

1) Un entier naturel n a 15 diviseurs. on sait de plus que n est divisible par 6 mais pas par 8. Déterminer cet entier n.

   - n a 15 diviseurs et 15 ne peut se décomposer qu'en 15 ou 3×5 donc n a au plus deux facteurs premiers.
   - n est divisible par 6 donc divisible par 2 et 3 donc n a deux facteurs premiers 2 et 3. On a donc : $n = 2^\alpha 3^\beta$ avec $(1+\alpha)(1+\beta) = 3 \times 5$

$$\begin{cases} 1+\alpha = 3 \\ 1+\beta = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 1+\alpha = 5 \\ 1+\beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

- n n'est pas divisible par $8 = 2^3$, donc $\alpha < 3$. L'entier cherché n est donc :

$$n = 2^2\,3^4 = 4 \times 81 = 324$$

2) Déterminer le plus petit entier naturel possédant 28 diviseurs.

Soit n l'entier cherché. Les quatre décompositions de 28 sont :

$$28 \;,\; 2 \times 14 \;,\; 4 \times 7 \;,\; 2 \times 2 \times 7$$

- 1 facteur : $n = 2^\alpha$ avec $\alpha + 1 = 28 \Leftrightarrow \alpha = 27$: $n = 2^{27} = 134\,217\,728$.
- 2 facteurs en 2×14 : $n = 2^\alpha \times 3^\beta$ avec

$$\begin{cases} \alpha + 1 = 14 \\ \beta + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 13 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad n = 2^{13} \times 3 = 24\,576.$$

- 2 facteurs en 4×7 : $n = 2^\alpha \times 3^\beta$ avec

$$\begin{cases} \alpha + 1 = 7 \\ \beta + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad n = 2^6 \times 3^3 = 1\,728.$$

- 3 facteurs en $2 \times 2 \times 7$: $n = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$ avec

$$\begin{cases} \alpha+1=7 \\ \beta+1=\gamma+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=6 \\ \beta=\gamma=1 \end{cases} : \quad n = 2^6 \times 3 \times 5 = 960$$

Le plus petit entier naturel ayant 28 diviseurs est 960

3 Petit théorème de Fermat

Théorème 7 : Soit p premier et $a \in \mathbb{N}$ non multiple de p alors : $a^{p-1} \equiv 1\ (p)$
De plus pour tout $a \in \mathbb{N}$, on a : $a^p \equiv a\ (p)$

Démonstration : Soit les $(p-1)$ premiers multiples de a : $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$, et leurs restes dans division par p : $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{p-1}$.

- Ces restes sont deux à deux distinct.
  En effet s'il existe deux restes identiques soit $r_i = r_j$ avec $i > j$, alors :

$$ia - ja \equiv r_i - r_j\ (p) \overset{r_i = r_j}{\Leftrightarrow} a(i-j) \equiv 0\ (p)$$

  p premier divise $(i-j)a$, d'après le théorème de Gauss, p divise a ou $(i-j)$.
  Contradiction car a non multiple de p et $i - j < p$.

- Ces restes sont tous différents et comme il y a $(p-1)$ multiples, on trouve tous les restes non nul possibles dans division par p.
- On a alors : $r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_{p-1} = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (p-1) = (p-1)!$

- Le produit des $(p-1)$ multiples vérifie alors :

$$\begin{aligned} a \times 2a \times 3a \times \cdots \times (p-1)a &\equiv (p-1)!\ (p) \\ (p-1)!\, a^{p-1} &\equiv (p-1)!\ (p) \\ (p-1)!\, (a^{p-1}-1) &\equiv 0\ (p) \end{aligned}$$

  $(p-1)!$ est premier avec p car tous les facteurs de $(p-1)!$ sont inférieurs à p, d'après le théorème de Gauss $a^{p-1}-1$ est alors un multiple de p.

  On a donc : $a^{p-1}-1 \equiv 0\ (p) \quad \Leftrightarrow \quad a^{p-1} \equiv 1\ (p)$.

- En multipliant par a, on obtient : $a^p \equiv a\ (p)$.
  Cette égalité reste vraie si a est multiple de p car alors $a \equiv 0(p)$.

Remarque : Dans la suite, on nommera le théorème de Fermat pour le petit théorème de Fermat.

Exemple :

- $4^{12} \equiv 1\ (13)$ car 13 est premier et 4 non multiple de 13.
- 7 est premier et 3 non multiple de 7, donc, d'après le théorème de Fermat, on a :

$$3^6 \equiv 1 \mod 7 \overset{\uparrow n}{\Rightarrow} 3^{6n} \equiv 1^n \equiv 1\ (7) \quad \Leftrightarrow \quad 3^{6n}-1 \equiv 0\ (7)$$

  donc $3^{6n}-1$ est divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

⚠ La réciproque du théorème de Fermat est fausse. On peut avoir $a^{p-1} \equiv 1\ (p)$ sans pour cela avoir p premier. Cette égalité n'est pas un critère de primalité.

Contre-exemple : $2^{10} = 1024 = 341 \times 3 + 1$ donc $2^{10} \equiv 1\ (341)$.

On a alors : $2^{340} \equiv (2^{10})^{34} \equiv 1^{34} \equiv 1\ (341)$ et $341 = 11 \times 31$ non premier.