Matrices et suites

Table des matières

Introduction

La but de ce chapitre et du suivant est d'introduire un nouvel outil permettant de résoudre quelques problèmes concrets liés à des variables discrètes. Il s'agit d'introduire les matrices dans la modélisation de problèmes liés aux sciences économiques et sociales, aux sciences de la vie et de la Terre, à la physique, à l''informatique ...

Les matrices, en tant que tableaux, sont apparues il y a longtemps dans la résolution de systèmes d'équations linéaires à l'aide du déterminant, puis aux transformations géométriques (translation, rotation, symétrie, ...). Mais ce n'est qu'au milieu du XIXe siècle avec Sylvester qui donne le nom de matrice à ces tableaux puis avec Cayley qui définit les opérations usuelles, dans un traité sur les transformations géométriques que le calcul matricielle a pris toute sa dimension révolutionnaire. Enfin en 1913, Cullis utilise pour la première fois la notation entre parenthèse.

1 Matrice

1.1 Définition

Définition 1 : Une matrice $\mathbf{A}$ de dimension $n \times p$ à termes dans $\mathbb{R}$ est un tableau de réels de n lignes et p colonnes. On note alors :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou simplement} \quad \mathbf{A} = (a_{ij})$$

a_{ij} est le coefficient de $\mathbf{A}$ situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrice de dimension $n \times p$.

Remarque : Il est d'usage d'utiliser i pour l'indice ligne et j pour l'indice colonne.

Exemple : Soit $\mathbf{A}$ matrice (2×3) définie par : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & 3 & -1 \end{pmatrix}$

On a par exemple les coefficients $a_{21} = 4$ et $a_{13} = 0$

1.2 Matrices particulières

- $n = 1$, **matrice ligne** : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
- $p = 1$, **matrice colonne** : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$
- $n = p$, **matrice carrée** d'ordre n : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

  Sa diagonale principale a comme coefficients 4 et -2.
  L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

- Une matrice carrée est **symétrique** si $\forall i, j \quad a_{ij} = a_{ji}$: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- La **matrice identité** ou unité d'ordre n, notée $\mathbf{I}_n$, est la matrice carrée d'ordre n qui possède des "1" sur sa diagonale principale et des "0" ailleurs : $\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Une **matrice diagonale** d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n qui ne possède des éléments non nuls que sur sa diagonale principale : $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

1.3 Opération sur les matrice

1.3.1 Addition et produit par un scalaire (réel)

Définition 2 : Soit $\mathbf{A} = (a_{ij})$ et $\mathbf{B} = (b_{ij})$ de même dimension et k un réel.

- L'addition $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ est la matrice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ telle que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Le produit $k\mathbf{A}$ est la matrice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ telle que $c_{ij} = ka_{ij}$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et $2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque : L'addition et le produit par un scalaire sont identiques à celles utilisées par les vecteurs. Les matrices et les vecteurs ont donc une même structure appelée : espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.3.2 Transposition d'une matrice

Définition 3 : La transposée d'une matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de dimension $n \times p$ est la matrice, notée $\mathbf{A}^T = (c_{ij})$, de dimension $p \times n$ telle que $c_{ij} = a_{ji}$.

Exemple : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque : $\mathbf{A}$ symétrique, si et seulement si, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$

1.3.3 Produit de deux matrices

Définition 4 : Soit $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de dim. $n \times p$ et $\mathbf{B} = (b_{ij})$ de dim. $p \times q$.

Le produit $\mathbf{AB}$ est la matrice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ de dim. $n \times q$ telle que : $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

Remarque : c_{ij} correspond au produit scalaire de la ligne i de la matrice $\mathbf{A}$ avec la colonne j de la matrice $\mathbf{B}$.

Exemple : matrice$(2 \times \textbf{3})$ matrice$(\textbf{3} \times 2)$ = matrice(2×2)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 0} \\ 4 \quad 3 \quad -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1\times5+2\times2+0\times3} & 1\times1+2\times3+0\times5 \\ 4\times5+3\times2+(-1)\times3 & 4\times1+3\times3+(-1)\times5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{9} & 7 \\ 23 & 8 \end{pmatrix}$$

Propriété 1 : Le produit de deux matrices est :

- associatif : $\mathbf{A}\,(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\,\mathbf{C} = \mathbf{AB}\,\mathbf{C}$
- distributif par rapport à l'addition : $\mathbf{A}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$
- non commutatif : $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ en général.

1.4 Inversion d'une matrice

1.4.1 Définition

Définition 5 : Une matrice carrée $\mathbf{A}$ d'ordre n est inversible si, et seulement si, il existe une matrice carrée d'ordre n, appelée matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$, telle que :

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Si $\mathbf{A}^{-1}$ n'existe pas, on dit que la matrice $\mathbf{M}$ est singulière

Exemple : Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{AB} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4+6 & 12-12 \\ -2+2 & 6-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4+6 & -3+3 \\ 8-8 & 6-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_2 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

1.4.2 Condition pour qu'une matrice d'ordre 2 soit inversible

Définition 6 : Le déterminant de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le nombre réel noté :

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exemple : Pour $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 - 3 \times 2 = -2$

Théorème 1 : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

On a alors : $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Remarque : On retiendra pour la formule de $\mathbf{A}^{-1}$ que l'on permute les coefficients (a,d) de la diagonale principale de $\mathbf{A}$ et que l'on prend les coefficients opposés (b,c) de la seconde diagonale de $\mathbf{A}$.

Démonstration :

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On cherche $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que : $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_2$

$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par identification on a les systèmes : $\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$

Ces systèmes admettent des solutions si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ donc si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

Par combinaison linéaire, on obtient les solutions suivantes :

$$x = \frac{d}{ad - bc}, \quad z = \frac{-c}{ad - bc}, \quad y = \frac{-b}{ad - bc}, \quad t = \frac{a}{ad - bc}$$

On obtient $\mathbf{B} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On vérifie ensuite que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_2$.

Exemple : Déterminer la matrice inverse de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ donc $\mathbf{A}$ est inversible.

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 1,5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On retrouve la matrice $\mathbf{B}$ de l'exemple du paragraphe 1.4

1.5 Puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3

Définition 7 : On définit la puissance n-ième d'une matrice carrée $\mathbf{A}$ d'ordre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{AA} \dots \mathbf{A}}_{n \text{ facteurs}} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_p$$

Exemple : On donne $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{A}^2$ et $\mathbf{A}^3$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}$$

On donne $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. A l'aide de la calculatrice, calculer $\mathbf{B}^2$, $\mathbf{B}^3$ et $\mathbf{B}^{-1}$.

Pour la TI 83, on édite la matrice en donnant la dimension (ici 3×3) puis on rentre les coefficients ligne par ligne. On quitte, puis on sélectionne la matrice et on l'élève à la puissance 2, 3 et -1 pour la matrice inverse. On obtient alors :

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 13 & 15 & 8 \\ 11 & 13 & 12 \\ 13 & 13 & 10 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}^3 = \begin{pmatrix} 74 & 80 & 62 \\ 74 & 84 & 58 \\ 71 & 82 & 62 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ -1 & -5 & 8 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Remarque : Certaines matrices sont bien adaptées pour calculer la puissance n-ième. C'est le cas des matrices diagonales. En effet, pour trouver la puissance n-ième d'une matrice diagonale, il suffit d'élever à la puissance n les coefficients de la diagonale principale, les autres coefficients restant nuls.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^p \end{pmatrix}$$

On montre cette propriété par une récurrence sur n.

1.6 Diagonalisation

Définition 8 : Une matrice carrée $\mathbf{A}$ est diagonalisable s'il existe une matrice carrée $\mathbf{P}$ inversible et une matrice diagonale $\mathbf{D}$ telles que : $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$.
On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{A}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$.

Remarque : Dans la pratique les matrices $\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}$ seront données, mais il existe un procédé pour les déterminer.

Exemple : On pose $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. On donne $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$
2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{A}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$
3) En déduire $\mathbf{A}^n$

1) On calcule $\mathbf{P}^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 1 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 35 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \end{aligned}$$

2) **Initialisation :** $n = 1$, $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}^1\mathbf{P}^{-1}$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$.

$$\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^n \overset{\text{HR}}{=} \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1} \overset{\mathbf{A}=\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}}{=} \mathbf{P}\mathbf{D}\underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}}_{=\mathbf{I}_n}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{n+1}\mathbf{P}^{-1}$$

La proposition est héréditaire.
Par initialisation est hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$

3) En effectuant le calcul de $\mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$, on trouve :

$$\mathbf{A}^n = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5(-1)^n + 2\times 6^n & -2(-1)^n + 2\times 6^n \\ -5(-1)^n + 5\times 6^n & 2(-1)^n + 5\times 6^n \end{pmatrix}$$

2 Applications

2.1 Écriture matricielle d'un système linéaire

Théorème 2 : Soit le système (S) linéaire $(n \times n)$ suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On pose $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad$ et $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$

L'écriture matricielle du système (S) est alors : $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

Si $\mathbf{A}$ est inversible, le système admet une unique solution : $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Exemple : Soit le système suivant : $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x - 4y = 13 \end{cases}$

On a : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix}$.

$\det(\mathbf{A}) = 2(-4) - (-3)(5) = 7 \neq 0$ La matrice $\mathbf{A}$ est inversible.

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4+39 \\ -5+26 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 35 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.2 Suite de matrices

Définition 9 : Soit $(\mathbf{U}_n)$ une suite de matrices colonnes de premier terme $\mathbf{U}_0$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{U}_n$ où $\mathbf{A}$ est une matrice carrée.

L'expression de $\mathbf{U}_n$ en fonction de n et de $\mathbf{U}_0$ est alors : $\mathbf{U}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{U}_0$

Remarque : La suite $\mathbf{U}_n$ est donc une suite géométrique de matrices colonnes. On la rencontre dans l'évolution d'un système fermé. Pour connaître l'expression de $\mathbf{U}_n$ en fonction de n, on cherchera à diagonaliser la matrice $\mathbf{A}$.

2.2.1 Exemple 1 : système fermé

Dans une enceinte une population d'êtres unicellulaires ne peuvent se trouver que dans deux états A ou B. On désigne par a_n et b_n les effectifs des deux états, en milliers d'individus à l'instant n. On a constaté que 95 % des unicellulaires se trouvant à l'instant n dans l'état A n'ont pas changé d'état à l'instant $n+1$, ainsi que 80 % de ceux se trouvant à l'instant n dans l'état B. L'effectif total est de 500 000 individus. Cet effectif reste constant dans le temps.

1) Déterminer le système donnant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n

2) Écrire une fonction U(a,n) en Python donnant les populations, en milliers d'individus, des états A et B en fonction de a_0 et n.
   Que renvoie la fonction pour (375,30), (50,30), (500,30) ?
   Conjecturer l'évolution des populations a_n et b_n sur le long terme.

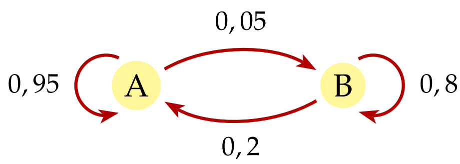
3) a) Traduire le système de la question 1) à l'aide de d'une suite $(\mathbf{U}_n)$ de matrices colonnes. En déduire $\mathbf{U}_n$ en fonction n et de $\mathbf{U}_0$ correspondant à l'état initial.

   b) $\begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}^n = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+0,75^n & 4-4\times 0,75^n \\ 1-0,75^n & 1+4\times 0,75^n \end{pmatrix}$ par une diagonalisation.

   Exprimer a_n et b_n en fonction de n et de a_0. Conclure.

1) On obtient, en observant ce qui rentre en A (a_{n+1}) et ce qui rentre en B (b_{n+1}) :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,95a_n + 0,2b_n \\ b_{n+1} = 0,05a_n + 0,8b_n \end{cases}$$



2) On peut proposer la fonction suivante, en observant que $b_n = 500 - a_n$.

```
def U(a,n):
    b=500-a
    for i in range(n):
        a=0.95*a+0.2*b
        b=500-a
    return a,b
```

On obtient alors :

$\text{U}(375,30) = (400,00\ ;\ 100,00)$

$\text{U}(50,30) = (399,94\ ;\ 100,06)$

$\text{U}(500,30) = (400,02\ ;\ 99,98)$

Sur le long terme, la répartition des populations A et B semble se stabiliser vers la répartition 400 pour A et 100 pour B quelque soit l'état initial.

3) a) On pose $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}$, d'où : $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{U}_n$.

On a alors : $\mathbf{U}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{U}_0$.

b) $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+0,75^n & 4-4\times 0,75^n \\ 1-0,75^n & 1+4\times 0,75^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4a_0+0,75^n a_0+4b_0-4(0,75^n)b_0 \\ a_0-0,75^n a_0+b_0+4(0,75^n)b_0 \end{pmatrix}$

En remplaçant $b_0 = 500-a_0,$ on obtient alors :

$$a_n = \frac{4}{5}a_0+\frac{0,75^n}{5}a_0 + 400-\frac{4}{5}a_0-400(0,75^n)+\frac{4(0,75^n)}{5}a_0 = 0,75^n(a_0-400)+400$$

$$b_n = \frac{1}{5}a_0-\frac{0,75^n}{5}a_0+100 - \frac{1}{5}a_0+400(0,75^n) - \frac{4(0,75^n)}{5}a_0 = 0,75^n(400-a_0)+100$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,75^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 400$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 100.$

les suites (a_n) et (b_n) convergent, quelque soit l'état initial, vers les valeurs respectives de 400 et 100 soit respectivement 400 000 et 100 000 cellules.

2.2.2 Étude d'une suite $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{AU}_n + \mathbf{B}$

On définit la suite de matrices $(\mathbf{U}_n)$ par $\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{AU}_n + \mathbf{B}$

avec $\mathbf{A} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telle que $\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{B}$

2) On définit la suite de matrices $(\mathbf{V}_n)$ par $\mathbf{V}_n = \mathbf{U}_n - \mathbf{X}.$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{AV}_n.$

b) En déduire l'expression de $\mathbf{V}_n$ puis de $\mathbf{U}_n$ en fonction $\mathbf{A}$ et de n.

3) On admet que par une diagonalisation on obtient : $\mathbf{A}^n = \dfrac{1}{4^n}\begin{pmatrix} 2^n & 3\times 2^n-3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Déterminer l'expression de $\mathbf{U}_n$ en fonction de n puis déterminer sa limite.

1) On a : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$ Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}(2x+3y)+2 \\ y = \dfrac{1}{4}y+3 \end{cases} \overset{\times 4}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 4x = 2x+3y+8 \\ 4y = y+12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ 2x = 3y+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 4 \end{cases}$$

2) a) $\mathbf{V}_{n+1} = \underbrace{\mathbf{U}_{n+1}}_{\mathbf{AU}_n+\mathbf{B}} - \underbrace{\mathbf{X}}_{\mathbf{AX}+\mathbf{B}} = \mathbf{AU}_n + \mathbf{B} - \mathbf{AX} - \mathbf{B} = \mathbf{AU}_n - \mathbf{AX} = \mathbf{A}(\underbrace{\mathbf{U}_n - \mathbf{X}}_{=\mathbf{V}_n}) = \mathbf{AV}_n$

b) $\mathbf{V}_0 = \mathbf{U}_0 - \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$

On a alors : $\mathbf{V}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{V}_0$ donc $\mathbf{U}_n = \mathbf{V}_n - \mathbf{X} = \mathbf{A}^n\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$

3) $\mathbf{U}_n = \mathbf{V}_n - \mathbf{X} = \mathbf{A}^n \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 2^n & 3\times 2^n - 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} -18\times 2^n + 9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18\times 0,5^n + 9\times 0,25^n + 10 \\ -3\times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = \lim 0,25^n = 0$ on en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{X}$

2.3 Transformations géométriques

Théorème 3 : Une transformation f du plan est une bijection du plan dans lui-même qui à un point M associe le point M′ tel que $M' = f(M)$.

Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé du plan, soit $M(x\,;\,y)$ et $M'(x'\,;\,y')$

1) f est la translation de vecteur $\vec{u}(a\,;\,b)$ alors : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

2) Si f n'est pas une translation alors : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{A}$ inversible.

- f est la rotation de centre O et d'angle θ alors : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
- f est l'homothétie de centre O et de rapport k alors : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
- f est la réflexion d'axe passant par O alors : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Remarque : Repérer le signe "$-$" dans la matrice de rotation.
Dans une réflexion l'angle θ correspond au double de l'angle que forme l'axe de symétrie avec l'axe des abscisses. On vérifie que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$.

Démonstration : Pour la matrice rotation de centre O et d'angle θ

On a $OM = OM' = r$ et $(\overrightarrow{OM}\,;\,\overrightarrow{OM'}) = \theta$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{r\cos\alpha}^{x}\cos\theta - \overbrace{r\sin\alpha}^{y}\sin\theta \\ \underbrace{r\sin\alpha}_{y}\cos\theta + \underbrace{r\cos\alpha}_{x}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$