Correction du devoir
du jeudi 5 novembre 2020

Exercice 1

Forme algébrique **(4 points)**

1) $z = \left(\dfrac{1}{1-i}\right)^2 = \left(\dfrac{1+i}{1+1}\right)^2 = \dfrac{1+2i-1}{4} = \dfrac{1}{2}i$

2) $z = 2 + \dfrac{3+10i}{4-4i} = 2 + \dfrac{(3+10i)(1+i)}{4(1+1)} = 2 + \dfrac{3+3i+10i-10}{8} = 2 - \dfrac{7}{8} + \dfrac{13}{8}i = \dfrac{9}{8} + \dfrac{13}{8}i$

3) $z = \dfrac{2}{3-2i} + \dfrac{5i}{2-i} = \dfrac{2(3+2i)}{9+4} + \dfrac{5i(2+i)}{4+1} = \dfrac{6+4i}{13} + \dfrac{-5+10i}{5} = \dfrac{6+4i-13+26i}{13}$
$= -\dfrac{7}{13} + \dfrac{30}{13}i$

4) $z = \dfrac{1-i}{3+i} + \dfrac{2}{1-i} = \dfrac{(1-i)(3-i)}{9+1} + \dfrac{2(1+i)}{1+1} = \dfrac{3-i-3i-1}{10} + \dfrac{2+2i}{2} = \dfrac{2-4i+10+10i}{10}$
$= \dfrac{6}{5} + \dfrac{3}{5}i$

Exercice 2

Ensemble de points **(3 points)**

1) Z réel $\Leftrightarrow \quad Z = \overline{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{z+1}{\overline{z}+1} = \dfrac{\overline{z}+1}{z+1} \quad \Leftrightarrow \quad (z+1)^2 = (\overline{z}+1)^2 \quad \Leftrightarrow$

$(z+1)^2 - (\overline{z}+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z+1-\overline{z}-1)(z+1+\overline{z}+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-\overline{z})(z+\overline{z}+2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad z - \overline{z} = 0 \text{ ou } z + \overline{z} + 2 = 0 \quad \overset{z=x+iy}{\Leftrightarrow} \quad y = 0 \text{ ou } 2x+2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \text{ ou } x = -1.$

L'ensemble E_1 des points M est l'union de l'axe des réels et de la droite verticale $x = -1$ privé du point A(-1).

2) $Z \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad Z + \overline{Z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{z+1}{\overline{z}+1} + \dfrac{\overline{z}+1}{z+1} = 0 \quad \overset{\times(z+1)(\overline{z}+1)}{\Leftrightarrow} \quad (z+1)^2 + (\overline{z}+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

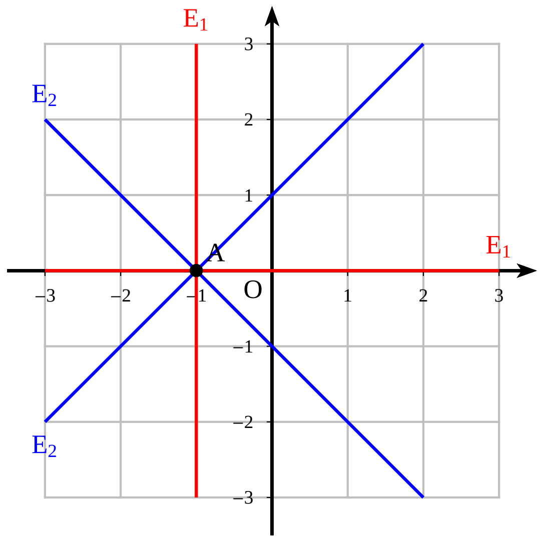
$z^2 + 2z + 1 + \overline{z}^2 + 2\overline{z} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + \overline{z}^2 + 2(z+\overline{z}) + 2 = 0 \quad \overset{z=x+iy}{\Leftrightarrow}$

$x^2 + 2ixy - y^2 + x^2 - 2ixy - y^2 + 4x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow 2x^2 - 2y^2 + 4x + 2 = 0 \quad \overset{\div 2}{\Leftrightarrow}$

$x^2 + 2x + 1 - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = x+1 \text{ ou } y = -x-1.$

L'ensemble E_2 est l'union des droites d'équations $y = x+1$ et $y = -x-1$ privé du point A(-1).

3) On obtient les ensembles E_1 et E_2 :



EXERCICE 3

Équation dans $\mathbb{C}$ **(4 points)**

1) $-2iz = 3z + 1 \quad \Leftrightarrow \quad z(3+2i) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad z = \dfrac{-1}{3+2i} = \dfrac{-3+2i}{9+4} = -\dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13}i$

2) $\dfrac{z-i}{z-(2-i)} = 3$ définie sur $D_f = \mathbb{C} - \{2-i\}$

$z - i = 3(z - 2 + i) \quad \Leftrightarrow \quad z - i = 3z - 6 + 2i \quad \Leftrightarrow \quad -2z = -6 + 4i \quad \Leftrightarrow \quad z = 3 - 2i \in D_f$

3) $z^2 - 4z + 8 = 0$, on a $\Delta = 16 - 32 = -16 = (4i)^2$,

deux racines conjuguées : $z_1 = \dfrac{4+4i}{2} = 2 + 2i$ ou $z_2 = 2 - 2i$.

4) $\dfrac{3+z}{3-z} = z$ définie sur $D_f = \mathbb{C} - \{3\}$

$3 + z = 3z - z^2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 2z + 3$, on a $\Delta = 4 - 12 = -8 = (2i\sqrt{2})^2$

deux racines conjuguées : $z_1 = \dfrac{2+2i\sqrt{2}}{2} = 1 + i\sqrt{2} \in D_f$ ou $z_2 = 1 - i\sqrt{2} \in D_f$

EXERCICE 4

Équation du second degré à coefficients complexes **(2 points)**

1) $(z+i)^2 = z^2 + 2iz - 1$.

2) $z^2 + 2iz - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z^2 + 2iz - 1) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z+i)^2 - 1 = 0$

3) $(z+i)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z + i = 1$ ou $z + i = -1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1 - i$ ou $z = -1 - i$

EXERCICE 5

Factorisation d'un polynôme **(3 points)**

1) $z = 1$ est une solution évidente de (E) car $1 + 2 - 1 - 2 = 0$.

2) $(z^2+az+b)(z^2+az+1) = z^4+az^3+z^2+az^3+a^2z^2+az+bz^2+abz+b$
$= z^4+2az^3+(1+a^2+b)z^2+(a+ab)z+b$

En identifiant à z^4+2z^3-z-2, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2a=2 \\ 1+a^2+b=0 \\ a+ab=-1 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ 1+a^2+b=1+1-2=0 \text{ vérifiée} \\ a+ab=1-2=-1 \text{ vérifiée} \end{cases}$$

3) $(z^2+z-2)(z^2+z+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2+z-2=0$ ou $z^2+z+1=0$

- $z^2+z-2=0$, $z_1=1$ racine évidente, $P=-2$ donc $z_2=-2$.
- $z^2+z+1=0$, on a $\Delta=-3$, donc $z_3=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $z_4=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 6

Suite dans $\mathbb{C}$ **(4 points)**

1) $u_{n+1}=z_{n+1}-i=\dfrac{1}{3}z_n+\dfrac{1}{3}i-i=\dfrac{1}{3}z_n-\dfrac{2}{3}i=\dfrac{1}{3}(z_n-i)=\dfrac{1}{3}u_n$.

La suite (u_n) est géométrique de raison $q=\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_0=z_0-i=1-i$.

2) $u_n=u_0\,q^n=(1-i)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ d'où $z_n=u_n+i=(1-i)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+i$.

3) $|u_n|=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\times\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ car $-1<\dfrac{1}{3}<1$, par produit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}|u_n|=0$.

4) $|u_n|$ représente la distance AM_n.
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}AM_n=0$ donc le point M_n tend vers le point A lorsque n est grand.