Correction du contrôle
du jeudi 25 novembre 2020

EXERCICE 1

Équation **(3 points)**

1) $(z^2-4z+13)(z^2-2z+2) = z^4-2z^3+2z^2-4z^3+8z^2-8z+13z^2-26z+26$
$= z^4-6z^3+23z-34z+26 = f(z)$

2) $f(z)=0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2-4z+13=0 \;(1) \;\text{ ou }\; z^2-2z+2 \;(2)$

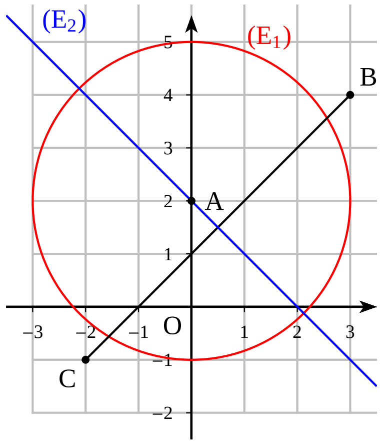
- $\Delta_1 = 16-52 = -36 = (6i)^2$, deux solutions complexes conjuguées
$$z_1 = \frac{4+6i}{2} = 2+3i \;\text{ ou }\; z_2 = \frac{4-6i}{2} = 2-3i$$

- $\Delta_1 = 4-8 = -4 = (2i)^2$, deux solutions complexes conjuguées
$$z_3 = \frac{2+2i}{2} = 1+i \;\text{ ou }\; z_4 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

$S = \{1-i\,;\; 1+i\,;\; 2-3i\,;\; 2+3i\}$

EXERCICE 2

Ensemble de points **(4 points)**



1) a) $|z-2i|=3$, on pose A$(2i)$, on a alors :
$|z-z_A|=3 \quad \Leftrightarrow \quad AM=3$.
L'ensemble (E_1) des points M est le cercle de centre A et de rayon 3.

b) $|z-3-4i| = |z+2+i|$,
on pose B$(3+4i)$ et C$(-2-i)$, on a alors :
$|z-z_B| = |z-z_C| \quad \Leftrightarrow \quad BM=CM$.
L'ensemble (E_2) des points M est la médiatrice du segment [BC].

2) $Z\in\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad Z=\overline{Z} \quad \overset{z\neq i}{\Leftrightarrow} \quad \dfrac{\overline{z}}{\overline{z}+i} = \dfrac{z}{z-i} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z}(z-i) = z(\overline{z}+i) \quad \Leftrightarrow \quad z\overline{z}-i\overline{z} = z\overline{z}+iz$

$\Leftrightarrow \quad i(z+\overline{z})=0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Re}(z)=0$

L'ensemble des points M(z) tel que Z soit réel est l'axe des imaginaires purs privé du point A(i).

EXERCICE 3

Formes d'un nombre complexe **(5 points)**

1) $z_1 = 4\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 4-4i.$

2) $|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$ et $\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi].$

On a alors : $z_2 = 2\left[\left[\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]\right] = 2\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{4-4i}{-1-i\sqrt{3}} = \dfrac{4(1-i)(-1+i\sqrt{3})}{1+3} = -1+i\sqrt{3}+i+\sqrt{3} = -1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3}).$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{4\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}.$

4) En égalisant la forme trigonométrique et algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$, on obtient :

$2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right) = -1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3}) \Leftrightarrow$

$\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

5) Pour comparer les deux valeurs, on les élève au carré :

$\left(\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ et $\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \dfrac{8+4\sqrt{3}}{16} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}.$

Leurs carrés sont égaux, et comme les quantités sont positives, les deux résultats de m_1 et m_2 sont égaux. Il n'y a pas de contradiction. Heureusement !

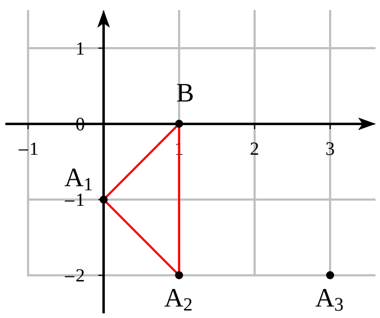
Exercice 4

Suite de nombres complexes **(8 points)**

1) a) $z_1 = (1+i)z_0 - i = -i$, $z_2 = (1+i)z_1 - i = (1+i)(-i) - i = -i+1-i = 1-2i$

$z_3 = (1+i)(1-2i) - i = 1-2i+i+2-i = 3-2i.$

b)



c) $\dfrac{z_2-z_1}{z_B-z_1} = \dfrac{1-2i+i}{1+i} = \dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{(1-i)^2}{1+1} = \dfrac{1-2i+1}{2} = -i.$

$\left|\dfrac{z_2-z_1}{z_B-z_1}\right| = |-i| \Leftrightarrow \dfrac{|z_2-z_1|}{|z_B-z_1|} = 1 \Leftrightarrow |z_2-z_1| = |z_B-z_1| \Leftrightarrow A_1A_2 = A_1B$

$(\overrightarrow{A_1A_2}\ ;\overrightarrow{A_1B}) = \arg\left(\dfrac{z_2-z_1}{z_B-z_1}\right) = \arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$

Le triangle BA_1A_2 est isocèle rectangle en A_1.

2) a) $u_{n+1} = |z_{n+1} - 1| = |(1+i)z_n - i - 1| = |(1+i)(z_n - 1)| = |1+i| \times |z_n - 1| = \sqrt{2}u_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{2}$, la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = |-1| = 1$.

b) On a alors $u_n = u_0\, q^n = (\sqrt{2})^n$. On veut donc $(\sqrt{2})^n > 1000$.

Sachant que $2^{10} = (\sqrt{2})^{20} = 1024$, on en déduit que $n = 20$.

3) a) $1 + i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) **Initialisation :** $n = 0$, on a $1 - (\sqrt{2})^0 e^0 = 1 - 1 = 0 = z_0$.
La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$,
supposons que $z_n = 1 - \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\,\frac{n\pi}{4}}$, montrons que $z_{n+1} = 1 - \left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^{i\,\frac{(n+1)\pi}{4}}$.

$$z_{n+1} = (1+i)z_n - i \overset{\text{HR}}{=} (1+i)\left(1 - \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\,\frac{n\pi}{4}}\right) - i = 1 + i - (1+i)\left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\,\frac{n\pi}{4}} - i$$
$$= 1 - \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \times \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\,\frac{n\pi}{4}} = 1 - (\sqrt{2})^n e^{i\,\frac{(n+1)\pi}{4}}$$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = 1 - \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\,\frac{n\pi}{4}}$.

c) $z_{2020} = 1 - (\sqrt{2})^{2020} e^{i\frac{2020\pi}{4}} = 1 - (\sqrt{2})^{2020} e^{i\,(505\pi)} = 1 - (\sqrt{2})^{2020} e^{i\pi} = 1 + (\sqrt{2})^{2020} \in \mathbb{R}$

Le point A_{2020} est donc sur l'axe des abscisses.