

Contrôle de mathématiques

Jeudi 21 janvier 2021

EXERCICE 1

Multiples

(4 points)

- 1) Déterminer tous les diviseurs positifs de 630. Combien y en a-t-il ?
- 2) Déterminer les couples d'entiers naturels $(x; y)$ vérifiant : $x^2 - xy = 6$
- 3) a) Montrer que si $d \in \mathbb{N}$ divise $(12n + 7)$ et $(3n + 1)$ alors d divise 3.
b) En déduire que la fraction $\frac{12n + 7}{3n + 1}$ est irréductible.

EXERCICE 2

Division euclidienne

(4 points)

- 1) On considère l'égalité : $23 \times 51 + 35 = 1\ 208$.
Sans effectuer de division, répondre aux questions suivantes :
 - a) Quels sont le quotient et le reste de la division de $-1\ 208$ par 51 ?
 - b) Quels sont le quotient et le reste de la division de 1 208 par 23.
- 2) On divise un entier naturel n par 152, puis par 147. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 13 et 98. Déterminer n .

EXERCICE 3

Congruence

(6 points)

- 1) a) Soit $n \geq 2$ et $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ avec $a \equiv b (n)$ et $c \equiv d (n)$.
En utilisant la compatibilité de la congruence avec la multiplication : $ac \equiv bd (n)$,
montrer la compatibilité de la congruence avec la puissance : $a^k \equiv b^k (n)$, $k \in \mathbb{N}$
 - b) Quel est le reste de $2\ 015^{2015}$ dans la division par 12 ?
 - c) Quel est le reste de $2\ 016^{2016}$ dans la division par 11 ?
- 2) Soit un entier naturel n tel que : $n = 10a + b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ et $0 \leq b \leq 9$.
 - a) Établir la liste des multiples de 17 inférieurs à 100.
 - b) Montrer que : $n \equiv 0 (17) \Leftrightarrow a - 5b \equiv 0 (17)$.
 - c) Énoncer en français un critère simple de divisibilité par 17.
 - d) En déduire, sans calculatrice, en expliquant votre démarche, les multiples de 17 parmi les entiers suivants : 562, 833, 1 547, 3 601.

EXERCICE 4

Équation Pell-Fermat

(4 points)

On considère l'équation (E) : $x^2 - 5y^2 = 1$ où $x, y \in \mathbb{N}$.
On suppose que $(x; y)$ est un couple solution de l'équation (E).

- 1) x et y peuvent-ils avoir la même parité ? Justifier.
- 2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Recopier et compléter le tableau suivant :

$k \equiv \dots (5)$	0	1	2	3	4
$k^2 \equiv \dots (5)$					

- 3) En déduire que : $x \equiv 1 (5)$ ou $x \equiv 4 (5)$.
- 4) Trouver alors une solution non triviale, différente de $(1,0)$, de l'équation (E).
Expliquer la démarche.

EXERCICE 5

Pièces d'un puzzle

(2 points)

En rangeant les n pièces de son puzzle, Raja constate que :

- si elle les range par groupe de 5, il lui reste 3 pièces ;
- si elle les range par groupe de 7, il lui reste 2 pièces ;
- si elle les range par groupe de 9, il lui reste 1 pièces ;
- et si elle les range par groupe de 11, il ne lui reste plus de pièce.

Sa mère affirme qu'alors $(2n - 11)$ est divisible par 5, 7, 9 et 11.

- 1) A-t-elle raison ?
- 2) Combien ce puzzle contient de pièces sachant que ce nombre est inférieur à 2 000 ?