Correction du contrôle
Du jeudi 21 janvier 2021

EXERCICE 1

Multiples **(4 points)**

1) 630 a 24 diviseurs :

$D_{630} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 14, 15, 18, 21, 30, 35, 42, 45, 63, 70, 90, 105, 126, 210, 315, 630\}$

2) $x^2 - xy = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-y) = 6$.
x et $x - y$ sont des diviseurs de 6 et comme $x, y \in \mathbb{N}$, on a $x \geqslant x - y$. On a donc les choix suivants :

$$\begin{cases} x = 6 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 3 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Les solutions sont donc $(6, 5)$ et $(3, 1)$.

3) a) On pose $a = 12n + 7$ et $b = 3n + 1$.

Si d divise a et b, d divise toute combinaison linéaire de a et de b donc d divise : $a - 4b = 12n + 7 - 12n - 4 = 3$.

b) D'après 3a), si $\dfrac{12n+7}{3n+1}$ est réductible alors 3 doit diviser $12n + 7$ et $3n + 1$.

Or $12n + 7 = 3(4n + 2) + 1 \equiv 1\ (3)$ et $3n + 1 \equiv 1\ (3)$ ce qui est contradictoire.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible.

EXERCICE 2

Division euclidienne **(4 points)**

1) a) $1\,208 = 23 \times 51 + 35 \overset{\times(-1)}{\Leftrightarrow} -1\,208 = 51(-23) \underbrace{-35}_{-51+16} \Leftrightarrow -1\,208 = 51(-24) + 16$

Le quotient et le reste de la division de 1 208 par 51 sont -24 et 16.

b) $1\,208 = 23 \times 51 + 35 \overset{35=23+12}{\Leftrightarrow} 1\,208 = 21 \times 52 + 12$

Le quotient et le reste de la division de $-1\,208$ par 23 sont 52 et 12.

2) On a : $\begin{cases} n = 152q + 13 \\ n = 147q + 98 \end{cases} \Rightarrow 152q + 13 = 147q + 98 \Rightarrow 5q = 85 \Rightarrow q = \dfrac{85}{5} = 17.$

On a alors : $n = 152 \times 17 + 13 = 2\,597$.

EXERCICE 3

Congruence **(6 points)**

1) a) Montrons par récurrence sur k que : $\forall k \in \mathbb{N},\quad a^k \equiv b^k\ (n)$.
Initialisation : : $k=0,\quad a^0 = b^0 = 1$, donc $a^0 \equiv b^0\ (n)$.
La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $a^k \equiv b^k\ (n)$, montrons que $a^{k+1} \equiv b^{k+1}\ (n)$.

HR : $a^k \equiv b^k\ (n)$ comme la congruence est compatible avec la multiplication et $a \equiv b\ (n)$, en multipliant, on a : $a \times a^k \equiv b \times b^k\ (n) \quad \Rightarrow \quad a^{k+1} \equiv b^{k+1}\ (n)$.
La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall k \in \mathbb{N},\quad a^k \equiv b^k\ (n)$.

b) $2\,015 = 12 \times 167 + 11$ donc $2\,015 \equiv 11 \equiv -1\ (12)$.

Par puissance : $2\,015^{2015} \equiv (-1)^{2015} \equiv -1 \equiv 11\ (12)$.

La reste de $2\,015^{2015}$ dans la division par 12 est 11.

c) $2\,016 = 11 \times 183 + 3$ donc $2\,016 \equiv 3\ (11) \overset{\uparrow 2016}{\Rightarrow} 2\,016^{2016} \equiv 3^{2016}\ (11)$

Déterminons le cycle des restes de 3^n dans la division de 11 :
$3^0 \equiv 1\ (11),\ 3^1 \equiv 3\ (11),\ 3^2 \equiv 9\ (11),\ 3^3 \equiv 5\ (11),\ 3^4 \equiv 4\ (11),\ 3^5 \equiv 1\ (11)$.
Le cycle est de 5, donc :

$2\,016^{2016} \equiv 3^{2016} \equiv 3^{5\times 403+1} \equiv (3^5)^{403} \times 3 \equiv 1^{403} \times 3 \equiv 3\ (11)$.

Le reste dans la division par 11 de $2\,016^{2016}$ par 11 est 3.

2) a) Les multiples de 17 inférieurs à 100 sont : 0, 17, 34, 51, 68, 85.

b) Par double implication :

$$n \equiv 0\ (17) \Rightarrow 10a + b \equiv 0\ (17) \overset{\times -5}{\Rightarrow} -50a - 5b \equiv 0\ (17) \overset{-50\equiv 1\ (17)}{\Rightarrow} a - 5b \equiv 0\ (17).$$

Réciproquement :

$$a - 5b \equiv 0\ (17) \overset{\times 10}{\Rightarrow} 10a - 50b \equiv 0\ (17) \overset{-50\equiv 1\ (17)}{\Rightarrow} 10a + b \equiv 0\ (17) \Rightarrow n \equiv 0\ (17).$$

c) « Un nombre est divisible par 17 si, et seulement si, le nombre de ses dizaines diminué de 5 fois du chiffre de ses unités est divisible par 17. »

d) 562 : $56 - 10 = 46$ non divisible par 17.
833 : $83 - 15 = 68$ divisible par 17.
1 547 : $154 - 35 = 119$ et $11 - 45 = -34$ divisible par 17.
3 601 : $360 - 5 = 355$ et $35 - 25 = 10$ non divisible par 17.

EXERCICE 4

Équation Pell-Fermat **(4 points)**

1) Un nombre et son carré ont même parité. Par disjonction des cas :

- Si x et y pairs, alors x^2 et y^2 pairs d'où x^2 et $5y^2$ pairs et par somme $x^2 - 5y^2$ est pair. Impossible.

- Si x et y impairs, alors x^2 et y^2 impairs d'où x^2 et $5y^2$ impairs et par somme $x^2 - 5y^2$ est pair. Impossible.

Conclusion : x et y ne peuvent avoir la même parité.

2) On a le tableau suivant :

$k \equiv \dots\ (5)$	0	1	2	3	4
$k^2 \equiv \dots\ (5)$	0	1	4	4	1

3) $x^2 - 5y^2 = 1 \overset{\text{mod } 5}{\Rightarrow} x^2 \equiv 1\ (5)$.

D'après le tableau du 2), les valeurs possibles pour x sont : $x \equiv 1\ (5)$ ou $x \equiv 4\ (5)$.

4) Pour trouver une solution non triviale de l'équation (E) on teste successivement la quantité $5y^2 = x^2 - 1$ avec pour valeurs de x : 1, 4, 6, 9, 11 ... qui vérifient donc $x \equiv 1\ (5)$ ou $x \equiv 4\ (5)$:

- $x = 1 \Rightarrow 5y^2 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow y = 0$ c'est la solution triviale.
- $x = 4 \Rightarrow 5y^2 = 16 - 1 = 15 \Rightarrow y^2 = 3$ impossible.
- $x = 6 \Rightarrow 5y^2 = 36 - 1 = 35 \Rightarrow y^2 = 7$ impossible.
- $x = 9 \Rightarrow 5y^2 = 81 - 1 = 80 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = 4$ solution.

Une solution non triviale est (9,4) en effet : $9^2 - 5 \times 4^2 = 81 - 80 = 1$

Exercice 5

Pièces d'un puzzle **(2 points)**

1) Traduisons les conditions avec des congruences

- Rangement par groupe de 5 : $n \equiv 3\ (5) \Rightarrow 2n - 11 \equiv 6 - 11 \equiv -5 \equiv 0\ (5)$.
- Rangement par groupe de 7 : $n \equiv 2\ (7) \Rightarrow 2n - 11 \equiv 4 - 11 \equiv -7 \equiv 0\ (7)$.
- Rangement par groupe de 9 : $n \equiv 1\ (9) \Rightarrow 2n - 11 \equiv 2 - 11 \equiv -9 \equiv 0\ (9)$.
- Rangement par groupe de 11 : $n \equiv 0\ (11) \Rightarrow 2n - 11 \equiv -11 \equiv 0\ (11)$.

Si n vérifie les conditions de rangement alors $(2n - 11)$ est divisible par 5, 7, 9 et 11.
La mère de Raja a donc raison.

2) Comme 5, 7, 9 et 11 sont premiers entre eux deux à deux, $(2n - 11)$ est divisible par $5 \times 7 \times 9 \times 11 = 3\,465$.

Comme $n < 2000 \Rightarrow 2n - 11 < 3989$.

Le seul multiple de 3 465 inférieur à 3 989 est 3 465.

Donc $2n - 11 = 3\,465 \Leftrightarrow n = \dfrac{3465 + 11}{2} = 1\,738$.

On vérifie ensuite que 1 738 correspond aux conditions de rangement.
Ce puzzle contient 1 738 pièces.