Correction du devoir

Du jeudi 4 mars 2021

EXERCICE 1

Algorithme pour le calcul du pgcd **(3 points)**

1) Montrons par double inégalité que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a - b\ ,\ b)$.

   Soit $D = \text{pgcd}(a, b)$ et $d = \text{pgcd}(a - b, b)$.

   D divise a et b donc divise toute combinaison linéaire de a et de b donc divise $a - b$. D divise $(a - b)$ et b donc $D \leqslant d$.

   d divise $(a - b)$ et b donc divise toute combinaison linéaire de a et de $a - b$ donc divise $(a - b) + b = a$. D'où d divise a et b donc $d \leqslant D$.

   Comme $D \leqslant d$ et $d \leqslant D$ alors $D = d$.

2) Par soustractions successives, on obtient en prenant $|a - b|$:

308	165	143	22	121	99	22	77	55	22	33	11	22	11
165	143	22	121	99	22	77	55	22	33	11	22	11	11

   $\text{pgcd}(308, 165) = 11$. Le processus s'arrête quand $a = b$.

3) On obtient la fonction $\text{pgcd}(a, b)$ en Python suivante :

```
def pgcd(a,b):
    while a!=b:
        c=abs(a-b)
        a=b
        b=c
    return a
```

EXERCICE 2

Restes dans l'algorithme d'Euclide **(2 points)**

Écrivons les divisions successives avec les quotients et le pgcd donnés :

$$\begin{cases} a = 2b + r_0 \\ b = 4r_0 + r_1 \\ r_0 = 1r_1 + r_2 \\ r_1 = 3r_2 + r_3 \\ r_2 = 2r_3 \\ r_3 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_3 = 15 \\ r_2 = 2 \times 15 = 30 \\ r_1 = 3 \times 30 + 15 = 105 \\ r_0 = 105 + 30 = 135 \\ b = 4 \times 135 + 105 = 645 \\ a = 2 \times 645 + 135 = 1\,425 \end{cases}$$

Les valeurs de a et b sont respectivement : 1 425 et 645.

Exercice 3

Nombres premiers entre eux **(3 points)**

1) Soit $a = 11n + 3$ et $b = 7n + 2$
   On a : $-7a + 11b = -7(11n + 3) + 11(7n + 2) = -77n - 21 + 77n + 22 = 1.$

   Il existe donc $(u, v) = (-7, 11)$ tel que $au + bv = 1$, d'après le théorème de Bézout, a et b sont premiers entre eux.

   $135 = 11 \times 12 + 3$ et $86 = 7 \times 12 + 2$,

   135 et 86 sont de la forme a et b donc 135 et 86 sont premiers entre eux.

2) Soit $a = 2n + 1 \Leftrightarrow 2n = a - 1$ et $b = n(n + 1)$. On a alors :
   $4b = 2n(2n + 2) \overset{2n=a-1}{=} (a - 1)(a + 1) = a^2 - 1 \Leftrightarrow a^2 - 4b = 1.$

   Il existe donc $(u, v) = (a, -4)$ tel que $au + bv = 1$, d'après le théorème de Bézout, a et b sont premiers entre eux et donc la fraction $\dfrac{a}{b}$ est irréductible.

Exercice 4

Rationalité **(3 points)**

1) Soit $\dfrac{p}{q}$ est une racine de f alors :

   $$2 \times \frac{p^3}{q^3} + 5 \times \frac{p^2}{q^2} + 5 \times \frac{p}{q} + 3 = 0 \overset{\times q^3}{\Leftrightarrow} 2p^3 + 5p^2q + 5pq^2 + 3q^3 = 0 \quad \text{(E)}.$$

   (E) $\Leftrightarrow$ $p(2p^2 + 5pq + 5q^2) = -3q^3$.

   Donc p divise $3q^3$, or $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$, d'après le théorème de Gauss, p divise 3.

   (E) $\Leftrightarrow$ $2p^3 = q(-5p^2 - 5pq - 3q^2)$.

   Donc q divise $2p^3$, or $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$, d'après le théorème de Gauss, q divise 2.

2) On a alors comme $p \in \mathbb{Z}$, donc $p \in \{-3\,, -1\,,\ 1\,,\ 3\}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, donc $q \in \{1\,,\ 2\}$.

   On teste les 8 racines possibles : -3, $-\dfrac{3}{2}$, -1, $-\dfrac{1}{2}$, 1, $\dfrac{1}{2}$, 3 et $\dfrac{3}{2}$.

   Seule la solution $-\dfrac{3}{2}$ convient.

Exercice 5

Équation diophantienne **(3,5 points)**

1) a) $(-2\,, -3)$ est solution de l'équation (E) : $7(-2) - 5(-3) = -14 + 15 = 1$

   b) Soit (x, y) une solution de de (E). On a alors :

   $$\begin{cases} 7x - 5y = 1 \\ 7(-2) - 5(-3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{On soustrait terme à terme} \\ 7(x + 2) - 5(y + 3) = 0 \Leftrightarrow 7(x + 2) = 5(y + 3) \quad \text{(E')} \end{array}$$

   5 divise $7(x + 2)$, or $\operatorname{pgcd}(5, 7) = 1$, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $(x + 2)$ donc $x + 2 = 5k$, $k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant dans (E'), on trouve $y + 3 = 7k$.

   Les solutions sont donc de la forme : $\begin{cases} x = -2 + 5k \\ 7y = -3 + 7k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

   On vérifie facilement que ces solutions sont solutions de (E).

2) On doit avoir : $\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad k \geqslant 1 \\ x+y \leqslant 25 \quad \Rightarrow \quad -5+12k \leqslant 25 \quad \Rightarrow \quad k \leqslant \dfrac{30}{12} \quad \Rightarrow \quad k \leqslant 2 \end{cases}$

Deux valeurs de k conviennent :

	rouges	verts	blancs
$k=1$	3	4	18
$k=2$	8	11	6

Exercice 6

Sabliers **(3 points)**

1) Soit S_1 le sablier de 11 mn et S_2 celui de 5 mn.
On appelle x le nombre de fois où S_1 s'est écoulé et y où S_2 s'est écoulé.
On doit avoir $11x-5y=2$ dont une solution est $(2,4)$.
Lise lance S_1 et S_2 en même temps. Lorsqu'un sablier est fini elle le retourne. Lorsque Lise a retourné 1 fois S_1 et 3 fois S_2 et que S_2 vient de s'écouler, Lisa donne le top. Il reste alors 2 mn pour que S_1 soit écoulé.

2) Lisa peut mesurer toute durée entière en minute car 11 et 5 sont premiers entre eux.
$11x-5y=1$ a comme solution $(1,2)$ donc pour une durée d, l'équation $11x-5y=d$ admet comme solution $(d,2d)$.

Exercice 7

PGCD et suite **(2,5 points)**

1) $u_{n+1}=4u_n+1 \quad \Leftrightarrow \quad 1\times u_{n+1}-4u_n=1$.

Il existe donc $(a,b)=(1,-4)$ tel que $au_{n+1}+bu_n=1$, d'après le théorème de Bézout, u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.

2) a) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1}=u_{n+1}+\dfrac{1}{3}=4u_n+1+\dfrac{1}{3}=4u_n+\dfrac{4}{3}=4\left(u_n+\dfrac{1}{3}\right)=4v_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q=4$ et de premier terme $v_0=\dfrac{1}{3}$

b) $v_n=\dfrac{1}{3}\times 4^n$ donc $u_n=v_n-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}(4^n-1)$.

3) $\text{pgcd}(u_{n+1}\ ,\ u_n)=1 \overset{\times 3}{\Rightarrow} 3\text{pgcd}(u_{n+1}\ ,\ u_n)=3 \quad \Rightarrow \quad \text{pgcd}(3u_{n+1}\ ,\ 3u_n)=3 \quad \Rightarrow$
$\text{pgcd}(4^{n+1}-1\ ,\ 4^n-1)=3$.