Correction du contrôle

Du jeudi 09 décembre 2021

Exercice 1

Équation **(3 points)**

1) $f(i) = i^3 - (4\sqrt{3} + i)i^2 + 4(4 + i\sqrt{3})i - 16i = -i + 4\sqrt{3} + i + 16i - 4\sqrt{3} + 16i = 0$

   Comme i est une racine de f, on peut factoriser $f(z)$ par $(z - i)$.

2) a) $(z - i)(z^2 - 4z\sqrt{3} + 16) = z^3 - 4z^2\sqrt{3} + 16z - iz^2 + 4iz\sqrt{3} - 16i$
   $= z^3 - (4\sqrt{3} + i)z^2 + 4(4 + i\sqrt{3})z - 16i = f(z)$

   b) $f(z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = i$ ou $z^2 - 4z\sqrt{3} + 16 = 0$. d'où $\Delta = 48 - 64 = -16 = (4i)^2$

   deux racines complexes conjuguées $z_2 = \dfrac{4\sqrt{3} + 4i}{2} = 2\sqrt{3} + 2i$ ou $z_3 = 2\sqrt{3} - 2i$

Exercice 2

Ensemble de points **(4 points)**

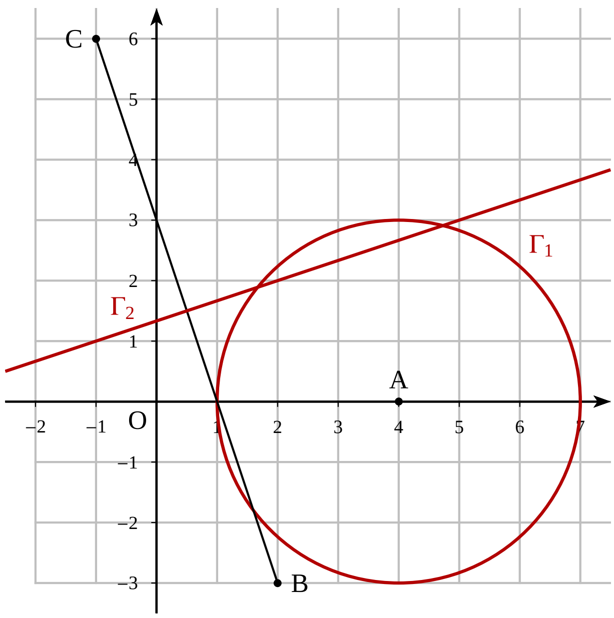
1) a) $|z - 4| = 3$ on pose A(4), on a alors $|z - z_A| = 3 \Leftrightarrow \text{AM} = 3$.

   L'ensemble Γ_1 des points M est le cercle de centre A et de rayon 3.

   b) $|z - 2 + 3i| = |z + 1 - 6i|$ on pose B$(2 - 3i)$ et C$(-1 + 6i)$ on a alors :

   $|z - z_B| = |z - z_C| \Leftrightarrow \text{BM} = \text{CM}$

   L'ensemble Γ_2 des points M est la médiatrice de segment [BC].



2) $|z'| = 1 \Leftrightarrow |z - 1 + 2i| = |z - i|$ on pose E$(1 - 2i)$ et F(i) on a alors :

   $|z - z_E| = |z - z_F| \Leftrightarrow \text{EM} = \text{FM}$

   L'ensemble des points M est la médiatrice de [EF].

EXERCICE 3

Formes d'un nombre complexe **(5 points)**

1) a) $-1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b) $(-1 + i\sqrt{3})^6 = \left(2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^6 = 2^6 e^{i\,4\pi} = 64 \times 1 = 64$.

2) $z_n = (2-2i)^n = \left[2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^n = \left(2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n = 2^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}$

$z_n \in i\,\mathbb{R} \overset{k\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \overset{\times\frac{4}{\pi}}{\Leftrightarrow} n = 2 + 4k \Leftrightarrow n \equiv 2\ (4)$

3) a) On obtient la figure suivante :

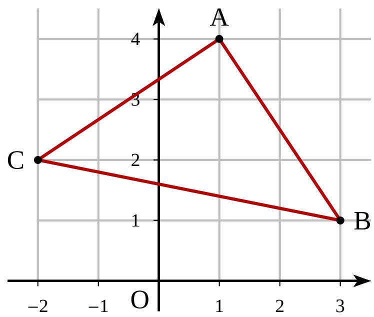
b) ABC est isocèle rectangle en A :

$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3 + i - 1 - 4i}{-2 + 2i - 1 - 4i} = \frac{2 - 3i}{-3 - 2i}$

$\overset{\times(-1)}{=} \frac{-2 + 3i}{3 + 2i} = \frac{i(3 + 2i)}{3 + 2i} = i$.

$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = |i| \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = 1 \Leftrightarrow AB = AC$

$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg(i) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$.



EXERCICE 4

Suite de nombres complexes **(8 points)**

1) a) $\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) $z_1 = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 = \frac{4}{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2) a) Soit par récurrence ou en généralisant la notion de suite géométrique sur $\mathbb{C}$:

(z_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ et de premier terme $z_0 = 1$

$z_n = z_0\,q^n = 1 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

b) O, A_0 et A_n alignés si : $z_n \in \mathbb{R} \overset{k\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \frac{n\pi}{6} = k\pi \overset{\times\frac{6}{\pi}}{\Leftrightarrow} n = 6k \Leftrightarrow n \equiv 0\ (6)$.

3) a) $d_n = A_nA_{n+1}$ soit la distance entre A_n et A_{n+1}.

b) $d_0 = \left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right| = \left|i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) $d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)\right| = \left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| \times |z_{n+1} - z_n| = \frac{2}{\sqrt{3}}d_n$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{d_{n+1}}{d_n} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, donc la suite (d_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et de premier terme $d_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. On a alors : $d_n = d_0\, q^n = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.

4) a) $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_n} = \dfrac{\left(1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n - z_n}{z_n} \overset{\div z_n}{=} i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $\arg\left(\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_n}\right) = \arg\left(i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}, \overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}) = \dfrac{\pi}{2}$

Le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est rectangle en A_n.

5) a) $|z_n| > 10 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n > 10$

On a l'algorithme suivant.

```
from math import*
n=0
u=2/sqrt(3)
while u<=10 :
    n=n+1
    u=2/\sqrt{3}*u
print(n)
```

b) L'algorithme retourne alors $n = 17$