Contrôle de mathématiques

Jeudi 13 octobre 2022

Exercice 1

QCM **(4 points)**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des quatre questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) La partie imaginaire du nombre complexe $z = 3 - 2i$ est

a) $-2i$ **b)** 3 **c)** -2 **d)** i

2) La forme algébrique de nombre complexe $(3+i)(5-i)$ est

a) $15 - i^2$ **b)** $15 + i^2$ **c)** $14 + 2i$ **d)** $16 + 2i$

3) La forme algébrique de nombre complexe $\dfrac{2-3i}{1+i}$ est

a) $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ **b)** $\dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2}i$ **c)** $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}i$ **d)** $1 - 2i$

4) Le polynôme $P(z) = 2z^3 + 3z^2 + 5z + 4$ est factorisable par

a) $z - 1$ **b)** $z + 1$ **c)** $z - i$ **d)** $z + 2$

Exercice 2

Forme algébrique **(2 points)**

Mettre les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

1) $z_1 = \dfrac{1+2i}{2+i}$

2) $z_2 = \dfrac{3-15i}{3-2i}$

Exercice 3

Équations du premier degré **(4 points)**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant la solution sous forme algébrique :

1) $i\,z + 1 - 2i = 0$

2) $(2+i)z + 2 - i = 3z + 5$

3) $z - 2i\,\overline{z} = 5 - i$, on pourra poser $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$

Exercice 4

Équations du second degré **(3 points)**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant les solutions sous forme algébrique :

1) $3z^2 + 12z + 39 = 0$

2) $z(z^2 - 8z + 32) = 0$

EXERCICE 5

Racines d'un polynôme **(2 points)**

Soit le polynôme $P(z)$ tel que : $P(z) = z^4 + 2z^2 - 8z + 5$

1) Montrer que l'on peut écrire $P(z) = (z-1)^2(z^2 + 2z + 5)$
2) En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de $P(z) = 0$

EXERCICE 6

Ensemble de points **(5 points)**

Pour tout complexes $z \neq 1$, on pose $z' = \dfrac{z+i}{z-1}$.

Soit le point A d'affixe 1. On pourra poser $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

1) Montrer que l'ensemble Γ_1 des points M(z) pour que z' soit réel est une droite privée d'un point dont on déterminera une équation.
2) Montrer que l'ensemble Γ_2 des points M(z) pour que z' soit un imaginaire pur est un cercle privé d'un point dont on déterminera le centre et le rayon.
3) Tracer ces deux ensembles Γ_1 et Γ_2 dans le plan complexe de repère $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.