Correction du contrôle

Du jeudi 13 octobre 2022

EXERCICE 1

QCM **(4 points)**

1) **Réponse c)**
2) **Réponse d)** $(3+i)(5-i) = 15-3i+5i+1 = 16+2i$
3) **Réponse c)** $\dfrac{2-3i}{1+i} = \dfrac{(2-3i)(1-i)}{1^2+1^2} = \dfrac{2-2i-3i-3}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}i$
4) **Réponse b)** $z=-1$ racine de $P(z)$ car :
   $P(-1) = 2(-1)^3+3(-1)^2+5(-1)+4 = -2+3-5+4 = 0$ donc $P(z) = (z+1)(az^2+bz+c)$.

EXERCICE 2

Forme algébrique **(2 points)**

1) $z_1 = \dfrac{1+2i}{2+i} = \dfrac{(1+2i)(2-i)}{2^2+1^2} = \dfrac{2-i+4i+2}{5} = \dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$
2) $z_2 = \dfrac{3-15i}{3-2i} = \dfrac{3(1-5i)(3+2i)}{3^2+2^2} = \dfrac{3(3+2i-15i+10)}{13} = \dfrac{3(13-13i)}{13} = 3-3i$

EXERCICE 3

Équations du premier degré **(4 points)**

1) $i\,z+1-2i=0 \Leftrightarrow i\,z = -1+2i \Leftrightarrow z = \dfrac{-1+2i}{i} = 2+i$
2) $(2+i)\,z+2-i = 3z+5 \Leftrightarrow (-1+i)z = 3+i \Leftrightarrow z = \dfrac{3+i}{-1+i} = \dfrac{(3+i)(-1-i)}{1^2+1^2}$
   $= \dfrac{-3-3i-i+1}{2} = -1-2i$
3) $z-2i\,\bar{z} = 5-i$, on pose $z = x+iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, l'équation devient :
   $x+iy-2i(x-iy) = 5-i \Leftrightarrow x+iy-2ix-2y = 5-i = 0 \Leftrightarrow (x-2y)+i(-2x+y) = 5-i$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=5 \\ -2x+y=-1 \quad (\times 2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=5 \quad (1) \\ -4x+2y=-2 \quad (2)\end{cases} \overset{(1)+(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -3x=3 \Leftrightarrow x=-1 \\ (2)\ \ y=-1+2x=-3\end{cases}$$
   La solution est donc $z=-1-3i$

EXERCICE 4

Équations du second degré **(3 points)**

1) $3z^2+12z+39=0 \overset{\div 3}{\Leftrightarrow} z^2+4z+13=0$, $\Delta = 16-52 = -36 = (6i)^2$.
   $\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-4+6i}{2} = -2+3i$ et $z_2 = -2-3i$

2) $z(z^2 - 8z + 32) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z^2 - 8z + 32 = 0$ (2)
de (2) , $\Delta = 64 - 128 = -64 = (8i)^2$ deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{8 + 8i}{2} = 4 + 4i \text{ ou } z_2 = 4 - 4i \text{ d'où } S = \{0\,;\, 4 - 4i\,;\, 4 + 4i\}$$

EXERCICE 5

Racines d'un polynôme **(3 points)**

1) $(z-1)^2(z^2+2z+5) = (z^2-2z+1)(z^2+2z+5) = z^4+2z^3+5z^2-2z^3-4z^2-10z+z^2+2z+5$
$= z^4 + 2z^2 - 8z + 5 = P(z)$

2) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2(z^2 + 2z + 5) = 0 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z^2 + 2z + 5 = 0$ (2)
De (2) , $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$ deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i \text{ ou } z_2 = -1 - 2i \text{ d'où } S = \{1\,;-1 - 2i\,;-1 + 2i\}$$

EXERCICE 6

Ensemble de points **(4 points)**

1) $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z' = \overline{z'} \Leftrightarrow \dfrac{z + i}{z - 1} = \dfrac{\bar{z} - i}{\bar{z} - 1} \overset{z\neq 1}{\Leftrightarrow} (z + i)(\bar{z} - 1) = (z - 1)(\bar{z} - i) \Leftrightarrow$
$\cancel{z\bar{z}} - z + i\bar{z} - i = \cancel{z\bar{z}} - iz - \bar{z} + i \Leftrightarrow (-z + \bar{z}) + i(z + \bar{z}) = 2i$ on pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

On obtient alors : $-2iy + 2ix = 2i \overset{\div 2i}{\Leftrightarrow} -y + x = 1 \Leftrightarrow y = x - 1.$

Γ_1 est la droite d'équation $y = x - 1$ privé du point A.

2) $z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z' + \overline{z'} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{z + i}{z - 1} + \dfrac{\bar{z} - i}{\bar{z} - 1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(z + i)(\bar{z} - 1) + (z - 1)(\bar{z} - i)}{(z - 1)(\bar{z} - 1)} = 0 \Leftrightarrow$
$z\bar{z} - z + i\bar{z} - i + z\bar{z} - iz - \bar{z} + i = 0 \Leftrightarrow 2z\bar{z} - (z + \bar{z}) + i(-z + \bar{z}) = 0$ on pose $z = x + iy$

On obtient alors : $2(x^2 + y^2) - 2x + i(-2iy) = 0 \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} x^2 - x + y^2 + y = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Γ_2 est le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ privé du point A.

Remarque : : Le cercle Γ_2 passe par l'origine O.

3) On obtient les ensembles Γ_1 et Γ_2 suivants :