Contrôle de mathématiques

Jeudi 3 octobre 2024

EXERCICE 1

Vrai-Faux **(3 points)**

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en vous justifiant

1) Soit z et z' deux nombres complexes.
   Proposition 1 : Si $z^2 + z'^2 = 0$ alors $z = z' = 0$
2) **Proposition 2** : z est un imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.
3) **Proposition 3** : si $z = \dfrac{2+4\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ alors z est un imaginaire pur.

EXERCICE 2

Forme algébrique **(2 points)**

Mettre les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

1) $z_1 = \dfrac{2-3\mathrm{i}}{-4+3\mathrm{i}}$
2) $z_2 = \dfrac{\mathrm{i}\,(2-5\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}$

EXERCICE 3

Équations du premier degré **(2 points)**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant la solution sous forme algébrique :

1) $3\mathrm{i}(z+2) = \mathrm{i}+5$
2) $3z - 5 + 2\mathrm{i}\,z = 2\mathrm{i} - 3z + 4\mathrm{i}\,z$

EXERCICE 4

Équations du second degré **(4 points)**

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $3z^2 + 6z + 4 = 0$
2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 6z + 25 = 0$
   b) Donner la forme algébrique des nombres complexes : $(1+2\mathrm{i})^2$ et $(1-2\mathrm{i})^2$
   c) En déduire les solutions de l'équation : $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$

EXERCICE 5

Racines de polynômes **(4 points)**

1) Soit le polynôme complexe : $P(z) = z^3 + 4z^2 + 2z - 28$
   a) Calculer $P(2)$.
   b) En déduire toutes les solutions complexes de l'équation : $P(z) = 0$
2) Soit le polynôme complexe : $Q(z) = z^3 - (2+\mathrm{i})\,z^2 + 2(1+\mathrm{i})\,z - 2\mathrm{i}$
   a) Calculer $Q(\mathrm{i})$
   b) En déduire toutes les solutions complexes de l'équation : $Q(z) = 0$

EXERCICE 6

Ensemble de points **(5 points)**

Pour tout complexes $z \neq \mathrm{i}$, on pose $z' = \dfrac{z+3}{z-\mathrm{i}}$.

Soit le point A d'affixe i. On pourra poser $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

1) Montrer que l'ensemble E_1 des points $\mathrm{M}(z)$ pour que z' soit réel est une droite privée du point A dont on déterminera une équation.
2) Montrer que l'ensemble E_2 des points $\mathrm{M}(z)$ pour que z' soit un imaginaire pur est un cercle privé du point A dont on déterminera le centre et le rayon.
3) Tracer ces deux ensembles E_1 et E_2 dans le plan complexe de repère $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.