Correction du contrôle

Du jeudi 3 octobre 2024

EXERCICE 1

Vrai-Faux **(3 points)**

1) **Proposition 1 fausse** : contre exemple $z = 1$ et $z' = \mathrm{i}$, on a $1^2 + \mathrm{i}^2 = 1 - 1 = 0$.
2) **Proposition 2 vraie** : z imaginaire pur $\Leftrightarrow z = b\,\mathrm{i},\ b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -b\,\mathrm{i} = -z$.
3) **Proposition 3 vraie** : $z = \dfrac{2+4\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{(2+4\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{4+1} = \dfrac{4+2\mathrm{i}+8\mathrm{i}-4}{5} = \dfrac{10\mathrm{i}}{5} = 2\mathrm{i} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

EXERCICE 2

Forme algébrique **(2 points)**

1) $z_1 = \dfrac{2-3\mathrm{i}}{-4+3\mathrm{i}} = \dfrac{(2-3\mathrm{i})(-4-3\mathrm{i})}{16+9} = \dfrac{-8-6\mathrm{i}+12\mathrm{i}-9}{25} = -\dfrac{17}{25} + \dfrac{6}{25}\mathrm{i}$
2) $z_2 = \dfrac{\mathrm{i}\,(2-5\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(2\mathrm{i}+5)(1-\mathrm{i})}{1+1} = \dfrac{2\mathrm{i}+2+5-5\mathrm{i}}{2} = \dfrac{7}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

EXERCICE 3

Équations du premier degré **(2 points)**

1) $3\mathrm{i}(z+2) = \mathrm{i}+5 \Leftrightarrow z+2 = \dfrac{\mathrm{i}+5}{3\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{-\mathrm{i}\,(\mathrm{i}+5)}{3} - 2 = \dfrac{1-5\mathrm{i}-6}{3} = -\dfrac{5}{3} - \dfrac{5}{3}\mathrm{i}$
2) $3z - 5 + 2\mathrm{i}\,z = 2\mathrm{i} - 3z + 4\mathrm{i}\,z \Leftrightarrow 3z + 2\mathrm{i}\,z + 3z - 4\mathrm{i}\,z = 5 + 2\mathrm{i} \Leftrightarrow z(6-2\mathrm{i}) = 5+2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{5+2\mathrm{i}}{6-2\mathrm{i}} = \dfrac{(5+2\mathrm{i})(6+2\mathrm{i})}{36+4} = \dfrac{30+10\mathrm{i}+12\mathrm{i}-4}{40} = \dfrac{13}{20} + \dfrac{11}{20}\mathrm{i}$

EXERCICE 4

Équations du second degré **(4 points)**

1) $3z^2 + 6z + 4 = 0$, on a $\Delta = 36 - 48 = -12 = \left(2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 < 0$

Deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-6+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{6} = -1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$ ou $z_2 = -1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

2) a) $z^2 + 6z + 25 = 0$, on a $\Delta = 36 - 100 = -64 = (8\mathrm{i})^2 < 0$

Deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-6+8\mathrm{i}}{2} = -3+4\mathrm{i}$ ou $z_2 = -3-4\mathrm{i}$.

b) $(1+2\mathrm{i})^2 = 1 + 4\mathrm{i} - 4 = -3 + 4\mathrm{i}$ et $(1-2\mathrm{i})^2 = 1 - 4\mathrm{i} - 4 = -3 - 4\mathrm{i}$.

c) $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$, on pose $Z = z^2$ l'équation devient $Z^2 + 6Z + 25 = 0$.

D'après la question 2 a) : $Z_1 = -3+4\mathrm{i}$ ou $Z_2 = -3-4\mathrm{i}$.

On revient à z :
$$\begin{aligned} z^2 &= -3+4\mathrm{i} \overset{2\,b)}{\Leftrightarrow} z^2 = (1+2\mathrm{i})^2 \Leftrightarrow z_1 = 1+2\mathrm{i} \text{ ou } z_2 = -1-2\mathrm{i} \\ z^2 &= -3-4\mathrm{i} \overset{2\,b)}{\Leftrightarrow} z^2 = (1-2\mathrm{i})^2 \Leftrightarrow z_3 = 1-2\mathrm{i} \text{ ou } z_4 = -1+2\mathrm{i} \end{aligned}$$

Exercice 5

Racines de polynômes **(4 points)**

1) a) $P(2) = 8 + 4 \times 4 + 2 \times 2 - 28 = 0$, donc $z = 2$ racine de P.

b) On factorise $P(z)$ par $(z-2)$: $P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c)$.

On a $a = 1$ et $c = 14$ et $b - 2 = 4 \Leftrightarrow b = 6$ d'où $P(z) = (z-2)(z^2 + 6z + 14)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = 2$ ou $z^2 + 6z + 14 = 0$, on a $\Delta = 36 - 56 = -20 = \left(2\text{i}\sqrt{5}\right)^2 < 0$

Deux racines complexes : $z_2 = \dfrac{-6 + 2\text{i}\sqrt{5}}{2} = -3 + \text{i}\sqrt{5}$ ou $z_3 = -3 - \text{i}\sqrt{5}$.

2) a) $Q(\text{i}) = -\text{i} + 2 + \text{i} + 2\text{i} - 2 - 2\text{i} = 0$, donc $z = \text{i}$ racine de Q.

b) On factorise $Q(z)$ par $(z - \text{i})$: $P(z) = (z - \text{i})(az^2 + bz + c)$.

On a $a = 1$ et $c = 2$ et $b - \text{i} = -2 - \text{i} \Leftrightarrow b = -2$ d'où $Q(z) = (z - \text{i})(z^2 - 2z + 2)$

$Q(z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = \text{i}$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$, on a $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2\text{i})^2 < 0$

Deux racines complexes : $z_3 = \dfrac{2 + 2\text{i}}{2} = 1 + \text{i}$ ou $z_3 = 1 - \text{i}$.

Exercice 6

Ensemble de points **(5 points)**

1) $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z' = \overline{z'} \Leftrightarrow \dfrac{z+3}{z-\text{i}} = \dfrac{\bar{z}+3}{\bar{z}+\text{i}} \Leftrightarrow (z+3)(\bar{z}+\text{i}) = (z-\text{i})(\bar{z}+3) \Leftrightarrow$

$\cancel{z\bar{z}} + \text{i}z + 3\bar{z} + 3\text{i} = \cancel{z\bar{z}} + 3z - \text{i}z - 3\text{i} \Leftrightarrow \text{i}(z+\bar{z}) - 3(z-\bar{z}) = -6\text{i}$

On pose $z = x + \text{i}y$, on obtient $2\text{i}x - 6\text{i}y = -6\text{i} \overset{\div(-2\text{i})}{\Leftrightarrow} -x + 3y = 3 \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{3} + 1$

E_1 est la droite d d'équation $y = \dfrac{x}{3} + 1$ privé du point A.

2) $z' \in \text{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow z' + \overline{z'} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{z+3}{z-\text{i}} + \dfrac{\bar{z}+3}{\bar{z}+\text{i}} = 0 \overset{\times(z-\text{i})(\bar{z}+\text{i})}{\Leftrightarrow} (z+3)(\bar{z}+\text{i}) + (z-\text{i})(\bar{z}+3) = 0 \Leftrightarrow$

$z\bar{z} + \text{i}z + 3\bar{z} + \cancel{3\text{i}} + z\bar{z} + 3z - \text{i}\bar{z} - \cancel{3\text{i}} = 0 \Leftrightarrow 2z\bar{z} + \text{i}(z-\bar{z}) + 3(z+\bar{z}) = 0$

On pose $z = x + \text{i}y$, on obtient $2(x^2 + y^2) + 2\text{i}^2 y + 6x = 0 \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} x^2 + y^2 - y + 3x = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{2}$

E_2 est le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{3}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$, de rayon $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ privé du point A.

3) Pour tracer le cercle, on place le centre Ω et l'on trace le cercle de rayon ΩA.