Contrôle de mathématiques

Jeudi 14 novembre 2024

EXERCICE 1

Vrai-Faux **(4 points)**

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en vous justifiant.

1) Soit $A(4+\mathrm{i})$, $B(-1-\mathrm{i})$ et $C(6-4\mathrm{i})$
   Proposition 1 : Le triangle ABC est isocèle rectangle.
2) **Proposition 2 :** Si $z \in \mathbb{U}$, alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2} \in \mathbb{R}$
3) **Proposition 3 :** Le nombre $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{2025}$ est un nombre réel.
4) Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z-1| = |z+\mathrm{i}|$
   Proposition 4 : L'ensemble (E) est une droite passant par l'origine.

EXERCICE 2

Forme exponentielle **(2 points)**

1) Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants : $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $1-\mathrm{i}$
2) En déduire la forme algébrique de $z = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10}$

EXERCICE 3

Formules d'Euler **(2 points)**

À l'aide des formules d'Euler, montrer que pour tout réel x, on a :

$$\cos x \sin^2 x = \frac{-\cos 3x + \cos x}{4}$$

EXERCICE 4

Racine cubique de l'unité **(2 points)**

1) Développer $(1+\mathrm{i})^3$
2) En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de : $z^3 = -2+2\mathrm{i}$

EXERCICE 5

Ensemble de points **(10 points)**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-\mathrm{i}\,z-2}{z+1}$$

Soit A, B et C les points d'affixes respectives $a=-1$, $b=2\mathrm{i}$ et $c=-\mathrm{i}$.

1) Soit C' l'image du point C par f. Donner l'affixe c' du point C sous forme algébrique.

2) Calculer l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D' d'affixe $d' = \frac{1}{2}$.

3) Pour tout complexe $z \neq -1$, on note p le module $|z+1|$ et p' le module de $|z'+\mathrm{i}|$.

   a) Démontrer que, pour tout nombre complexe $z \neq -1$, on a : $pp' = \sqrt{5}$.

   b) Si le point M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2, montrer qu'alors M' $= f(\mathrm{M})$ appartient à un cercle (Γ'), dont on précisera le centre et le rayon.

4) Pour tout complexe $z \neq -1$, on considère le nombre complexe $\omega = \dfrac{z-2\mathrm{i}}{z+1}$.

   a) Montrer que $z' = -\mathrm{i}\,\omega$.

   b) Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul.

   c) Vérifier que le point D appartient aux ensembles (Γ) et (F).

5) Représenter les ensembles (Γ), (F) et (Γ') en prenant 2 cm pour unité graphique.