Correction du contrôle

Du jeudi 14 novembre 2024

Exercice 1

Vrai-Faux **(4 points)**

1) **Proposition 1 : vraie**

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{6-4i-4-i}{-1-i-4-i} = \frac{2-5i}{-5-2i} \overset{\times(-1)}{=} \frac{-2+5i}{5+2i} = \frac{2i^2+5i}{5+2i} = \frac{i(5+2i)}{5+2i} = i$$

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |i| = 1 \Rightarrow |z_C - z_A| = |z_B - z_A| \Rightarrow AC = AB$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$$

2) **Proposition 2 : vraie**

$$z \in \mathbb{U} \Rightarrow z = e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R} \Rightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = 2\left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}\right) \overset{\text{Euler}}{=} 2\cos 2\theta \in \mathbb{R}.$$

3) **Proposition 3 : fausse**

$$(\sqrt{3}+i)^{2025} = \left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right]^{2025} = \left(2\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2025} = 2^{2025}\,e^{i\frac{2025\pi}{6}} = 2^{2025}\,e^{i\frac{9\pi}{6}} = 2^{2025}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$= -2^{2025}\,i \notin \mathbb{R}$$

4) **Proposition 4 : vraie**

Soit les points A(1) et B(−i), on a $|z-1| = |z+i| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$
L'ensemble (E) est la médiatrice du segment [AB] qui passe par O, l'origine O étant à égale distance de A et B car $|1| = |-i| = 1$

Exercice 2

Forme exponentielle **(2 points)**

1) $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2) $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{10}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{10} = (\sqrt{2})^{10}\left(e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{10} = 2^5 e^{i\frac{70\pi}{12}} = 32\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$$= 32\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 16\sqrt{3} - 16i$$

Exercice 3

Formules d'Euler **(2 points)**

$$\cos x \sin^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\left(e^{3ix} - 2e^{ix} + e^{-ix} + e^{ix} - 2e^{-ix} + e^{-3ix}\right) = -\frac{1}{8}\left(e^{3ix} + e^{-3ix} - e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) = \frac{-\cos 3x + \cos x}{4}$$

Exercice 4

Racine cubique de l'unité **(2 points)**

1) $(1+\mathrm{i})^3 = 1 + 3\mathrm{i} - 3 - \mathrm{i} = -2 + 2\mathrm{i}$

2) $z^3 = -2 + 2\mathrm{i} \Leftrightarrow z^3 = (1+\mathrm{i})^3 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z}{1+\mathrm{i}}\right)^3 = 1.$

   Les racines cubiques de l'unité sont 1, j et j^2

   - $\dfrac{z}{1+\mathrm{i}} = 1 \Leftrightarrow z = 1 + \mathrm{i}$
   - $\dfrac{z}{1+\mathrm{i}} = j \Leftrightarrow z = j(1+\mathrm{i}) = \left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i}) = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$
   - $\dfrac{z}{1+\mathrm{i}} = j^2 \Leftrightarrow z = j^2(1+\mathrm{i}) = \left(-\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i}) = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

Exercice 5

Ensemble de points **(10 points)**

1) $c' = \dfrac{-\mathrm{i}(-\mathrm{i}) - 2}{-\mathrm{i} + 1} = \dfrac{-1-2}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{-3(1+\mathrm{i})}{1+1} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

2) $\dfrac{-\mathrm{i}\,z - 2}{z+1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -2\mathrm{i}\,z - 4 = z + 1 \Leftrightarrow z(1+2\mathrm{i}) = -5 \Leftrightarrow z = \dfrac{-5}{1+2\mathrm{i}} = \dfrac{-5(1-2\mathrm{i})}{1+4}$

   $z = -1 + 2\mathrm{i}$ donc $d = -1 + 2\mathrm{i}$

3) a) $pp' = |(z+1)(z'+\mathrm{i})| = \left|(z+1)\left(\dfrac{-\mathrm{i}\,z-2}{z+1} + \mathrm{i}\right)\right| = |-\mathrm{i}\,z - 2 + \mathrm{i}\,z + \mathrm{i}| = |-2+\mathrm{i}|$

   $= \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

   b) $\mathrm{M} \in (\Gamma) \Rightarrow \mathrm{AM} = 2 \Rightarrow |z - a| = 2 \Rightarrow |z+1| = 2 \Rightarrow p = 2.$

   D'après 3 a) : $pp' = \sqrt{5} \Rightarrow p' = \dfrac{\sqrt{5}}{p} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow |z + \mathrm{i}| = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow |z - c| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}.$

   M' appartient au cercle (Γ') de centre C et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

4) a) $-\mathrm{i}\,\omega = \dfrac{-\mathrm{i}(z-2\mathrm{i})}{z+1} = \dfrac{-\mathrm{i}\,z-2}{z+1} = z'.$

   b) $z' \in \mathbb{R}^* \Rightarrow z' = \overline{z'} \Rightarrow \dfrac{-\mathrm{i}\,z-2}{z+1} = \dfrac{\mathrm{i}\,\bar{z}-2}{\bar{z}+1} \Rightarrow -\mathrm{i}\,z\bar{z} - \mathrm{i}\,z - 2\bar{z} - 2 = \mathrm{i}\,z\bar{z} - 2z + \mathrm{i}\,\bar{z} - 2$

   $2\mathrm{i}\,z\bar{z} + \mathrm{i}(z+\bar{z}) - 2(z-\bar{z}) = 0 \Rightarrow 2\mathrm{i}\,|z|^2 + 2\mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z) - 4\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z) = 0 \overset{\div(2\mathrm{i})}{\Rightarrow}$

   $|z|^2 + \mathrm{Re}(z) - 2\mathrm{Im}(z) = 0 \overset{z=x+\mathrm{i}y}{\Rightarrow} x^2 + y^2 + x - 2y = 0 \Rightarrow \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{5}{4}$

   L'ensemble (F) est le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

   On pourra remarquer que : $z' = 0 \Leftrightarrow -\mathrm{i}\,z = 2 \Leftrightarrow z = -\dfrac{2}{\mathrm{i}} = 2\mathrm{i}$ et $\mathrm{M}(2\mathrm{i}) \notin (\mathrm{F})$.

   c) $|d - a| = |-1 + 2\mathrm{i} + 1| = |2\mathrm{i}| = 2 \Rightarrow \mathrm{AD} = 2 \Rightarrow \mathrm{D} \in (\Gamma).$

   $d = -1 + 2\mathrm{i}$: $\left(-1 + \dfrac{1}{2}\right)^2 + (2-1)^2 = \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \mathrm{D} \in (\mathrm{F})$

d) On a la représentation suivante :