Oral de mathématiques

Jeudi 13 février 2025

Sujet 2

EXERCICE 1

Théorème de Bézout **(5 points)**

1) a) Citer le théorème de Bézout.
   b) A l'aide de l'identité de Bézout démontrer ce théorème.
   On rappelle l'identité de Bézout :
   « Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$, si $D = \text{pgcd}(a, b)$ alors il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tels que $au + bv = D$ »
2) Soit $n \in \mathbb{Z}$, on pose $a = 14n + 3$ et $b = 5n + 1$.
   Montrer que pour tout entier n, les entiers a et b sont premiers entre eux.

EXERCICE 2

Équation diophantienne **(10 points)**

1) a) Rappeler le corollaire du théorème de Bézout.
   b) L'équation $12x + 4y = 3$ admet-elle des solutions entières ?

On voudrait résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $221x + 338y = 26$.

2) a) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le pgcd(221 ; 338).
   b) Pourquoi l'équation (E) admet-elle des solutions entières ?
3) a) Montrer que l'équation (E) peut se mettre sous la forme : $17x + 26y = 2$
   b) Déterminer une solution évidente (x_0, y_0) de l'équation (E') : $17x + 26y = 1$.
   c) En déduire une solution (x_1, y_1) de l'équation (E).
   d) Déterminer alors l'ensemble S des solutions de (E).

EXERCICE 3

Fraction entière **(5 points)**

Soit n un entier naturel. On pose $a = n - 2$ et $b = n^2 + n + 3$

1) Démontrer que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, 9)$.
2) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, la fraction $\dfrac{n^2 + n + 3}{n - 2}$ est-elle un entier naturel ?