Contrôle de mathématiques

Jeudi 4 décembre 2025

EXERCICE 1

Vrai-Faux **(4 points)**

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en vous justifiant. Toute réponse sans justification ne rapporte aucun point

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit le nombre complexe $c = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et les points S et T d'affixes respectives c^2 et $\dfrac{1}{c}$

1) **Proposition 1 :** Le nombre c peut s'écrire $c = \dfrac{1}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})$
2) **Proposition 2 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, c^{3n} est un nombre réel.
3) **Proposition 3 :** Les points O, S et T sont alignés.
4) **Proposition 4 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|c| + |c^2| + |c^3| + \cdots + |c^n| = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

EXERCICE 2

Forme exponentielle **(2 points)**

1) Déterminer la forme exponentielle $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.
2) En déduire la forme algébrique de z^5

EXERCICE 3

Ensemble de points **(4 points)**

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm.
On donne les points A et B d'affixes respectives 2 et $1 - \mathrm{i}$.
Déterminer puis tracer sur l'annexe les ensembles de points M d'affixe z tels que :

1) (E_1) : $|z - 2| = |z|$. 2) (E_2) : $|z - 1 + \mathrm{i}| = 3$ 3) (E_3) : $\dfrac{z-2}{z+\mathrm{i}} \in \mathbb{R}$

EXERCICE 4

Formules d'Euler **(4 points)**

1) Rappeler les formules d'Euler pour $\cos x$ et $\sin x$.
2) À l'aide des formules d'Euler, montrer que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos 2x \sin^2 x = -\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}$$

EXERCICE 5

Transformation **(6 points)**

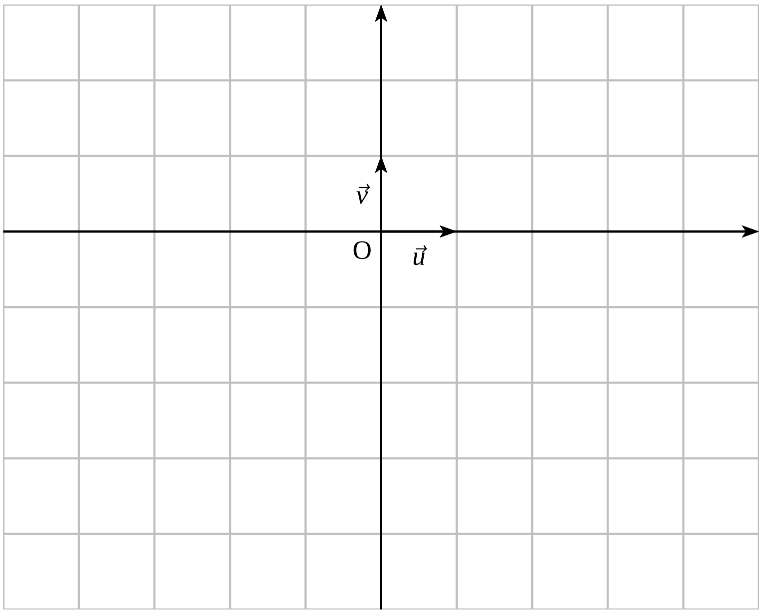
Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.
Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1 - z}{\bar{z} - 1}$$

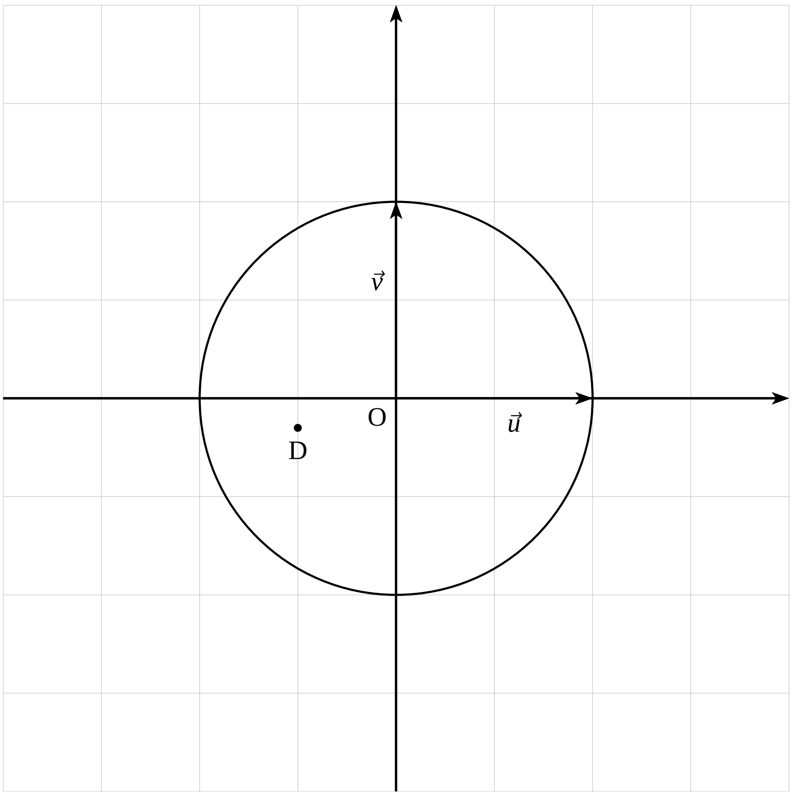
1) Soit C le point d'affixe $z_{\mathrm{C}} = -2 + \mathrm{i}$.
   a) Calculer l'affixe $z_{\mathrm{C}'}$ du point C' image de C par la transformation f, et placer les points C et C' dans le repère donné en annexe.
   b) Montrer que le point C' appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
   c) Montrer que les points A, C et C' sont alignés.
2) Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}$.
3) Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z' - 1}{z - 1}$ est réel.
   Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?
4) On a placé un point D sur la figure donnée en annexe. Construire son image D' par la transformation f.

Annexes à rendre avec votre copie

Nom :



Exercice 3



Exercice 5