# Correction du contrôle

## Du jeudi 22 janvier 2026

## EXERCICE 1

**QCM** **(5 points)**

1) **d)** : $D_{704} = \{1, 2, 4, 8, 11, 16, 22, 32, 44, 64, 88, 176, 352, 704\}$

2) **d)** : $-4\,304 = 17(-252) - 20 = 17(-252) - 34 + 14 = 17(-254) + 14$

3) **a)** : $37b \leqslant 644 < 38b \overset{\uparrow(-1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{38b} < \dfrac{1}{644} \leqslant \dfrac{1}{37b} \overset{\times 644b}{\Rightarrow} \underbrace{\dfrac{644}{38}}_{\approx 16{,}95} < b \leqslant \underbrace{\dfrac{644}{37}}_{\approx 17{,}4}$

$b = 17 \Rightarrow r = 644 - 37 \times 17 = 15.$

4) **a)** : $5^2 \equiv 4\ (7) \overset{\uparrow 68}{\Rightarrow} 5^{136} \equiv 4^{68}\ (7) \overset{\times 5}{\Rightarrow} 5^{137} \equiv 4^{68} \times 5\ (7)$

$4^3 \equiv 1\ (7) \overset{\uparrow 22}{\Rightarrow} 4^{66} \equiv 1\ (7) \overset{\times 4^2}{\Rightarrow} 4^{68} \equiv 16 \equiv 2\ (7)$ d'où $5^{137} \equiv 2 \times 5 \equiv 10 \equiv 3\ (7)$

5) **b)** : $164 \equiv 11\ (17) \overset{\uparrow 2}{\Rightarrow} 164^2 \equiv 11^2 \equiv 2\ (17) \overset{\uparrow 4}{\Rightarrow} 167^8 \equiv 2^4 \equiv -1\ (17)$

$\overset{\uparrow 20}{\Rightarrow} 164^{160} \equiv (-1)^{22} \equiv 1\ (17)$

## EXERCICE 2

**Multiples et division euclidienne** **(5 points)**

1) $9x^2 - y^2 = 27 \Leftrightarrow (3x - y)(3x + y) = 27$ donc $(3x - y)$ et $(3x + y)$ divisent 27

$D_{27} = \{1, 3, 9, 27\}$ et comme $x, y \in \mathbb{N}$ on a $3x - y \leqslant 3x + y$. Deux choix possibles :

$\begin{cases} 3x - y = 1 & (1) \\ 3x + y = 27 & (2) \end{cases} \overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} 6x = 28$ impossible

$\begin{cases} 3x - y = 3 & (1) \\ 3x + y = 9 & (2) \end{cases} \overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2$ et $(2)$ $y = 9 - 3x = 3$

Un couple solution (2 ; 3).

2) $(n - 3)$ divise $(4n - 1)$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$4n - 1 = k(n - 3) \Leftrightarrow 4(n - 3) + 11 = k(n - 3) \Leftrightarrow (n - 3)(k - 4) = 11$, $(n - 3)$ divise 11

| $n-3$ | $-11$ | $-1$ | $1$ | $11$ |
|---|---|---|---|---|
| $n$ | $-8$ | $2$ | $4$ | $14$ |

3) Soit $d$ un diviseur commun à $a$ et $b$ donc $d$ divise toute combinaison linéaire de $a$ et de $b$ donc $d$ divise : $11a - 3b = 11(3k + 2) - 3(11k + 1) = 33k + 22 - 33k - 3 = 19$,

comme $D_{19} = \{1 ; 19\}$ donc $d = 19$ ou $d = 1$.

4) $17b \leqslant 831 < 18b \overset{\uparrow(-1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{18b} < \dfrac{1}{831} \leqslant \dfrac{1}{17b} \overset{\times 831b}{\Rightarrow} \underbrace{\dfrac{831}{18}}_{\approx 46{,}1} < b \leqslant \underbrace{\dfrac{831}{17}}_{\approx 48{,}9}$ , on a 2 choix

$b = 47 \Rightarrow r = 831 - 17 \times 47 = 32$ ou $b = 48 \Rightarrow r = 831 - 17 \times 48 = 15.$

## EXERCICE 3

**Congruence** **(5 points)**

1) a) $2^3 \equiv 7+1 \equiv 1\ (7)$ et $3^2 \equiv 2\ (7) \overset{\uparrow 3}{\Rightarrow} 3^6 \equiv 2^3 \equiv 1\ (7)$

   b) $451 = 7 \times 64 + 3 \Rightarrow 451 \equiv 3\ (7)$ et $912 = 7 \times 130 + 2 \Rightarrow 912 \equiv 2\ (7)$

   $451^{139} + 912^{83} \equiv 3^{139} + 2^{83} \equiv \left(3^6\right)^{23} \times 3 + \left(2^3\right)^{27} \times 2^2 \equiv 1^{26} \times 3 + 1^{27} \times 4 \equiv 7 \equiv 0\ (7)$ .

   $451^{139} + 912^{83}$ est divisible par 7.

2) On a : $3^3 \equiv 27 \equiv 1\ (13)$ et $5^2 \equiv 25 \equiv -1\ (13)$
   $3^{126} + 5^{126} \equiv (3^3)^{42} + (5^2)^{63} \equiv 1^{42} + (-1)^{13} \equiv 1 - 1 \equiv 0\ (13)$
   $3^{126} + 5^{126}$ est divisible par 13.

## EXERCICE 4

**Divisibilité par 19** **(5 points)**

1) L'ensemble des multiples de 19 inférieurs à 100 est : $\mathrm{E} = \{0\,;\ 19\,;\ 38\,;\ 57\,;\ 76\,;\ 95\}$.

2) Par double implication :
   $n \equiv 0\ (19) \Rightarrow 10a + b \equiv 0\ (19) \overset{\times 2}{\Rightarrow} 20a + 2b \equiv 0\ (19) \overset{20 \equiv 1\ (19)}{\Longrightarrow} a + 2b \equiv 0\ (19)$
   Réciproquement :
   $a + 2b \equiv 0\ (19) \overset{\times 10}{\Rightarrow} 10a + 20b \equiv 0\ (19) \overset{20 \equiv 1\ (19)}{\Longrightarrow} 10a + b \equiv 0\ (19) \Rightarrow n \equiv 0\ (19)$

3) Un nombre est divisible par 19 si, et seulement si, son nombre de dizaines augmenté du double de son chiffre des unités est divisible par 19.

4) 931 : $93 + 2 = 95 \in \mathrm{E}$ divisible par 19.
   10 716 : $1\,071 + 12 = 1\,083$, on réitère $108 + 6 = 114$, on réitère $11 + 8 = 19 \in \mathrm{E}$ divisible par 19.