Principes de la rédaction mathématique

Ce qui se conçoit bien, s'énonce clairement

Pour mieux comprendre cet adage dû à Boileau, il faut comprendre sa négation : ce qui est mal compris s'exprime mal c'est à dire "*non clairement*" de manière confuse.

La rédaction mathématique a pour but de faire comprendre clairement au lecteur un problème mathématique. Cependant la rédaction, contrairement aux mathématiques, n'est pas une sciences exacte, c'est à dire que plusieurs rédactions sont possibles pour un même problème ou suivant le niveau mathématique, en effet ce qui était important pour un niveau collège pourra être rapidement énoncé pour un niveau de terminale.

Un premier test pour savoir si une rédaction est bonne ou pas, consiste à faire lire votre copie par une personne de même niveau que vous. Si cette personne a le sentiment que c'est sa propre capacité de compréhension qui est en cause, votre rédaction doit être confuse. C'est en effet paradoxal mais une copie mal rédigée induit parfois chez le lecteur ce sentiment de ne pas être à la hauteur en mathématique. Par contre, si la personne auquel vous faite lire votre copie trouve que finalement la question n'était pas si compliqué que cela, votre rédaction est certainement précise et rigoureuse. Ne dit-on pas que le génie est la capacité de rendre simple ce qui est compliqué.

La rédaction est toujours un compromis, car une épreuve de mathématique a toujours une certaine durée et que toutes choses n'ont pas nécessité à être détaillée dans les moindres détails. Il s'agit la plupart du temps de mettre en évidence un passage particulier, particulièrement important, de la résolution de la question. J'ai coutume de dire qu'une démonstration est comme une plaidoirie d'avocat, il faut argumenter, apporter les preuves, et ménager ses effets pour mettre en évidence la vérité. En général, la résolution d'une question, peut être séparée en deux parties, une suite de calculs et l'utilisation d'un théorème dont on vérifiera que les hypothèses sont bien vérifiées. Suivant votre niveau et celui du lecteur, on détaillera plus ou moins les calculs mais lorsque l'on utilise un théorème, il faudra toujours être scrupuleux sur les hypothèses d'application.

Une suite de calculs, sans aucune phrase en français, sera pour le moins indigeste et le lecteur se découragera vite, car aucun lien de raisonnement ne permet de comprendre où mènent tous ces calculs. Cette rédaction, qui en réalité n'en est pas une, n'aide aucunement le lecteur à comprendre ce que vous faites. Le correcteur aura le sentiment que vous ne comprenez pas la question et que cette suite de calculs n'est qu'un artifice, voire du bluff, pour cacher vos doutes sur une question.

Une rédaction minimaliste aura un effet un peu similaire. Car si le lecteur ne voit que le résultat d'un calcul, sans détail, il aura le sentiment qu'on veut lui faire croire quelque chose sans preuve. Il faut trouver le juste milieu, car le temps est limité, en détaillant les moments importants du calcul.

Enfin, une rédaction ne s'improvise pas, il faut s'y être préparé, car elle mêle des automatismes qui ne s'acquièrent que par la pratique et des définitions et théorèmes qu'il faut savoir citer au bon moment et précisément.

La critique est aisé et l'art est difficile, mais comme dans la rédaction vous devez être votre propre critique, l'art ne sera que du plaisir.

Voici quelques indications pour améliorer votre rédaction et apprendre quelques automatismes qu'il est bon de connaître.

D'une façon générale, la rédaction d'une question doit comporter trois parties :

- L'introduction
- Le raisonnement
- La conclusion

1 Introduire ce dont on parle

Introduire toutes les variables utilisées, même si elles sont définies dans l'énoncé.

Par exemple pour introduire un entier naturel non nul quelconque, on peut écrire :
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$
- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$

Si vous écrivez hors de tout contexte : "*Ils sont colinéaires*" qui ça "les vecteurs", quels vecteurs ?

On peut, en cours de raisonnement, introduire une variable personnelle par souci de concision. Par exemple, dans l'étude d'une fonction lorsque les zéros de la dérivée ont une expression un peu longue et que l'on doit à dresser le tableau de variation :

Exemple : Posons $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$

2 Mettre en évidence les articulations logiques

Quelques petits mots bien utile dans la rédaction :
«
- *donc, alors, il vient, d'où, par conséquent, ainsi,*
- *or, on sait que, de plus, en outre, ensuite, enfin,*
- *mais, cependant, toutefois, puisque, comme, car,*
- ...

»

Ces petits mots vous permettent de mettre du liant dans votre raisonnement et rend la lecture plus claire. Attention toutefois à la signification logique de ces petits mots, ils ont en effet une implication dans votre raisonnement.

Exemple : Montrer que : $\forall x \in [0\,;\,1], \quad \sqrt{1-x^2} \in [0\,;\,1]$.

Soit $x \in [0\,;\,1]$
- Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a : $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$
  en conséquence $0 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1$

- Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$: $0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1$

En conséquence $\forall x \in [0\,;\,1],\ \ \sqrt{1-x^2} \in [0\,;\,1]$.

Remarque : Éviter les termes « *forcément* » et « *obligatoirement* » et remplacer-les par « *nécessairement* » plus mathématique et évite ainsi un passage en « *force* ».

3 Annoncer ce que l'on fait

Rédiger correctement une question en mathématique, c'est aussi expliquer ce que l'on fait. Annoncer la méthode de résolution au début de la question : "*Montrons que...*", "*Démontrons par récurrence ...*", "*Montrons par l'absurde que ...*", "*Il ne reste plus qu'à montrer que...*", etc. Votre travail n'en sera que plus compréhensible.

4 Citer une définition ou un théorème

Citer une définition ou un théorème doit se faire avec précision . Il faut donner clairement et sans faute les hypothèses, les notations et la conclusion. Un théorème mal rédigé, imprécis, une hypothèse omise tout cela donne une impression de manque de rigueur et peut mener à une conclusion erronée.

Exemple : Définir le nombre dérivé d'une fonction en un point.

Réponse incorrecte : Le nombre dérivé de f en a est : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Manque de précision. Qui sont f et a ? Pourquoi la limite du taux d'accroissement existe-t-elle ?

Réponse correcte : Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$

On dit que f est dérivable en a si, et seulement si, la limite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie. On appelle dans ce cas, nombre dérivé de f en a cette limite, que l'on note $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x - 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Réponse incorrecte : $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ donc la fonction f change de signe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Quelles sont les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires ? Pourquoi cette solution est-elle unique ?

Réponse correcte : La fonction cube et la fonction affine $x \mapsto x-1$ sont deux fonctions définies et croissantes sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme.

$f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ donc la fonction f change de signe sur $\mathbb{R}$

La fonction f est continue, monotone, et change de signe sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0\,;\,1]$ sur $\mathbb{R}$.

5 Pas de mélange des genres

Écrire en français ou en mathématique mais pas les deux à la fois.

Ne pas remplacer, dans une phrase en français, les expressions : "*il existe*" par le symbole $\exists$ et "*pour tout*" par le symbole $\forall$.

Écrire "*la somme de deux entiers est un entier*" ou $\forall m, n \in \mathbb{Z},\ \ m+n \in \mathbb{Z}$ mais pas "$\forall m, n \in \mathbb{Z}$, *la somme de m et n est un entier*"

Le mélange autorisé le plus courant concerne le symbole $\in$, comme dans "Soit $x \in E$" qui peut remplacer "*Soit x un élément de E*".

6 Faire la différence entre *f* et *f(x)*

Rédaction incorrecte : "La fonction $\dfrac{x}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$"

Rédaction correcte : "La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$"

En effet $\dfrac{x}{x^2+1}$ n'est pas une fonction mais une expression algébrique.

Une fonction est une relation qui à une quantité x appelée variable associe la quantité $f(x)$. On l'a note alors : $x \mapsto f(x)$

Remarque : Parfois la fonction a un nom comme f, g, fonctions carrée, cube et racine carrée, exp, ln, cos, sin. On pourra alors écrire "La fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$.

7 Montrer une implication ou une équivalence

7.1 Montrer une implication

Quand on veut montrer que $p \Rightarrow q$, on procède par l'un des deux procédés suivant :

> On suppose que p est vraie et l'on montre qu'alors q est vraie.

Exemple : Si A et B sont deux événements indépendants alors il en est de même pour $\overline{\text{A}}$ et B.

Soit A et B deux événements indépendants alors : $P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A})P(\text{B})$

D'après les probabilités totales :

$$P(\text{B}) = P(\text{A} \cap \text{B}) + P(\overline{\text{A}} \cap \text{B}) = P(\text{A})P(\text{B}) + P(\overline{\text{A}} \cap \text{B}) \quad (1)$$

D'après la probabilité de l'événement contraire : $P(\text{A}) = 1 - P(\overline{\text{A}})$ (2)

En remplaçant (2) dans (1) :

$$P(\text{B}) = [1 - P(\overline{\text{A}})]P(\text{B}) + P(\overline{\text{A}} \cap \text{B}) = P(\text{B}) - P(\overline{\text{A}})P(\text{B}) + P(\overline{\text{A}} \cap \text{B})$$

On a alors : $P(\overline{\text{A}} \cap \text{B}) = P(\overline{\text{A}})P(\text{B})$. Les événements $\overline{\text{A}}$ et B sont indépendants.

Par la **contraposée**. On suppose que non q est vraie et l'on montre qu'alors non p est vraie

Exemple : Montrer que 109 est un nombre premier.

Test de primalité : si un entier n, avec $n \geqslant 2$, n'est pas premier alors il admet un diviseur premier p tel que $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$

On vérifie que 109 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7. De plus $10 < \sqrt{109} < 11$

109 n'admet pas de diviseur premier p tel que $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{109}$, d'après la contraposée du test de primalité, 109 est premier.

Remarque : La contraposée du test de primalité peut s'énoncer ainsi : « si un entier n, avec $n \geqslant 2$ n'admet pas de diviseur premier p tel que $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$ alors n est premier »

7.2 Montrer qu'une implication est fausse

Pour montrer que l'implication $p \Rightarrow q$ est fausse, il suffit de trouver un contre exemple où la proposition p est vraie et la proposition q fausse.

Exemple : Soit la proposition : « La suite (u_n) est croissante donc la suite (u_n) est divergente vers $+\infty$ »

Exemple classique que l'on donne en vrai-faux. La proposition est bien sûr fausse. Il faut donc trouver un contre-exemple d'une suite qui est croissante et non divergente vers $+\infty$ i.e. convergente.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

- La fonction inverse étant décroissante sur $]0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est croissante sur $]0\,;+\infty[$. Il en résulte que la suite (u_n) est croissante.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$, par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

  La suite (u_n) est donc convergente vers 1.

Conclusion : On a trouvé une suite croissante convergente, donc la proposition est fausse.

Remarque : La locution latine « i.e. » signifie « id. est » soit « c'est à dire ». Cette locution est fréquemment utilisée dans la rédaction mathématique.

7.3 Montrer une équivalence

Pour montrer que : $p \Leftrightarrow q$, on peut procéder de deux façons :

- Soit on raisonne par équivalence, comme c'est le cas dans la résolution d'équations.
- Soit on raisonne par double implication lorsque le raisonnement par équivalence s'avère périlleux i.e.
  On suppose que p est vraie et l'on montre alors que q est vraie.
  Réciproquement, on suppose que q est vraie et l'on montre alors que p est vraie.

Exemple : Montrer le théorème de Bézout à l'aide de l'identité de Bézout :

$$\text{pgcd}(a,b) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2, \ \ au + bv = 1$$

Raisonner par équivalence, s'avère ici impossible car l'identité de Bézout est une implication. On raisonne alors par double implication.

Rappelons l'identité de Bézout :

$$\text{pgcd}(a,b) = d \quad \Rightarrow \quad \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2, \ \ au + bv = d$$

- Supposons que $\text{pgcd}(a,b) = 1$, d'après l'identité de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$, tels que $au + bv = 1$
- Réciproquement, a et b étant deux entiers, supposons qu'il existe u, $v \in \mathbb{Z}$, tels que $au + bv = 1$. Soit d le $\text{pgcd}(a,b)$, d divise a et b donc divise toute combinaison linéaire de a et de b soit $au + bv$. En conséquence d divise 1, donc $d = 1$

8 Le raisonnement par l'absurde

Quand on veut montrer qu'une propriété p est vraie, on peut raisonner par l'absurde, c'est à dire supposer p fausse et arriver à une contradiction.

Exemple : Montrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Il existe donc deux entiers p et q premiers entre eux tels que : $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$

On élève au carré, on obtient alors : $\dfrac{p^2}{q^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = 2q^2$

- On en déduit que p^2 est pair. Comme un nombre et son carré ont même parité, p est pair. On peut donc écrire : $p = 2p'$
- On a alors $p^2 = 2q^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4p'^2 = 2q^2 \quad \Leftrightarrow \quad q^2 = 2p'^2$. On en déduit que q^2 est pair et par suite q est pair.
- p et q sont pairs. Il ne sont donc pas premiers entre eux. Contradiction

Conclusion : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

9 Rédaction de la démonstration par récurrence

La rédaction par récurrence doit être précise faute de quoi sa validité peut être contestée.

Le raisonnement par récurrence obéit au principe suivant : soit $\mathscr{P}_n$ une proposition qui dépend d'un entier naturel n :

Si $\mathscr{P}_0$ est vraie et si : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n \Rightarrow \mathscr{P}_{n+1}$, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$ est vraie

9.1 Proposition initialisée à 0

Exemple : Soit la suite (v_n) : $v_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 6}$.

Démontrer que la proposition : $\mathscr{P}_n$: $3 \leqslant v_n \leqslant 10$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $v_0 = 10$ donc $3 \leqslant v_0 \leqslant 10$. La proposition $\mathscr{P}_0$ est vraie.
On dit que la proposition $\mathscr{P}_n$ est initialisée à $n = 0$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que $3 \leqslant v_n \leqslant 10$, montrons alors que $3 \leqslant v_{n+1} \leqslant 10$

- De $3 \leqslant v_n \leqslant 10$ (hypothèse de récurrence), on en déduit que :
- $3 + 6 \leqslant v_n + 6 \leqslant 10 + 6$ d'où $9 \leqslant v_n + 6 \leqslant 16$
- De la croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$, on obtient
  $\sqrt{9} \leqslant \sqrt{v_n + 6} \leqslant \sqrt{16}$ soit $3 \leqslant v_{n+1} \leqslant 10$

La proposition est donc héréditaire.

Par **initialisation** et **hérédité**, $\forall n \in \mathbb{N},\ 3 \leqslant v_n \leqslant 10$.

9.2 Proposition initialisée à partir d'un certain rang

Exemple : Démontrer que la proposition : $\mathscr{P}_n$: $2^n \geqslant n^2$ est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 4.

Initialisation : Pour $n = 4$. $2^4 = 16 \geqslant 4^2 = 16$. La proposition $\mathscr{P}_4$ est vraie.
La proposition $\mathscr{P}_n$ est initialisée pour $n = 4$.

Hérédité : Soit $n \geqslant 4$.
Supposons que : $2^n \geqslant n^2$ montrons que $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$.

On a la suite des inégalités suivantes :

- $2^n \geqslant n^2$ hypothèse de récurrence. On multiplie par 2
- $2 \times 2^n \geqslant 2n^2$ (1)
- or $n \geqslant 4 \Rightarrow n \geqslant 3 \overset{\times n}{\Rightarrow} n^2 \geqslant 3n \overset{n \geqslant 1}{\Rightarrow} n^2 \geqslant 2n + 1 \overset{+n^2}{\Rightarrow} 2n^2 \geqslant (n+1)^2$
- en remplaçant dans (1), on a : $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$

La proposition est héréditaire.

Par **initialisation** et **hérédité**, $\forall n \geqslant 4,\ 2^n \geqslant n^2$.

9.3 Récurrence double

Il arrive parfois qu'on ne sache pas déduire $\mathscr{P}_{n+1}$ de $\mathscr{P}_n$, mais seulement $\mathscr{P}_n + 2$ de $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$. Une telle récurrence est appelée une récurrence **double**.
Le principe du raisonnement par récurrence double est de la forme suivante :

Si $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies et si : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1} \Rightarrow \mathscr{P}_{n+2}$,
alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathscr{P}_n$ est vraie

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1,\, u_1 = 2 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 2^n$.

Initialisation : $u_0 = 1 = 2^0$ et $u_1 = 2 = 2^1$. Les propositions $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies. La proposition est initialisée pour $n = 0$ et $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que $u_n = 2^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}$, montrons que $u_{n+2} = 2^{n+2}$

- $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ or par hypothèse $u_{n+1} = 2^{n+1}$ et $u_n = 2^n$, donc
- $u_{n+2} = 5 \times 2^{n+1} - 6 \times 2^n = 2^n(5 \times 2 - 6) = 2^n \times 4 = 2^{n+2}$

La proposition est héréditaire.

Par **initialisation** et **hérédité**, $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 2^n$.

9.4 Récurrence forte

Parfois, on ne peut déduire $\mathscr{P}_{n+1}$ que de toutes les propositions $\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \dots, \mathscr{P}_n$. Une telle récurrence est appelée récurrence **forte**.
Le principe du raisonnement par récurrence forte est de la forme suivante :

Si $\mathscr{P}_0$ est vraie et si : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ (\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathscr{P}_k) \ \Rightarrow \mathscr{P}_{n+1}$,
alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathscr{P}_n$ est vraie

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, est le produit de nombres premiers.

Initialisation : $2 = 2$ premier. La proposition $\mathscr{P}_2$ est vraie. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que les nombres $2, 3, \dots, n$ sont des produits de nombres premiers. Montrons que $n+1$ est le produit de nombres premiers. Deux cas se présentent :

- $n+1$ est premier, donc produit de nombres premiers.
- $n+1$ n'est pas premier. $n+1 = dq$ avec d et q entiers compris entre 2 et n. Comme tous ces entiers sont produits de nombres premiers (hypothèse de récurrence), il en est de même pour $n+1$

La proposition est héréditaire.

Par **initialisation** et **hérédité**, tout entier $n \geqslant 2$ est produit de nombres premiers.

10 Analyse-synthèse

Parfois pour déterminer les éléments d'un ensemble qui vérifie une propriété ou pour trouver une accroche afin de commencer une démonstration, on peut raisonner par analyse-synthèse.

Ce raisonnement se fait en deux parties :

- L'analyse : on suppose qu'il existe un élément x d'un ensemble E qui vérifie la propriété $\mathscr{P}$. Par implication, on détermine un critère que doit vérifier x. On réduit « le champs des possibles » pour x. Il peut même arriver qu'il n'existe qu'une solution possible.
- La synthèse : On vérifie alors les valeurs de x, parmi celles déterminées pendant l'analyse, qui vérifient la propriété $\mathscr{P}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation : $x(x+1)(2x+1) = 84$.

- **Analyse** : Soit x une solution de l'équation. D'après la factorisation, x et $x+1$ sont des diviseurs de 84. Les solutions de l'équation sont donc à chercher parmi les entiers consécutifs diviseurs de 84.

  $D_{84} = \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 7\ ,\ 12\ ,\ 14\ ,\ 21\ ,\ 28\ ,\ 42\ ,\ 84\}$

  Les valeurs de x possibles sont donc : 1, 2, 3 et 6.

- **Synthèse** : On vérifie parmi ces valeurs celles qui sont solutions de l'équation :

x	1	2	3	6
$x(x+1)(2x+1)$	6	30	84	546

  L'équation admet une unique solution : $x = 3$

Exemple : Montrer que la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3\,u_n}$ est majorée.

La difficulté est qu'on ne donne pas de majorant. L'analyse ici va permettre d'en trouver un.

- **Analyse** : Supposons que la suite (u_n) est majorée. Appelons M_{min} le plus petit majorant. On a alors la suite des inégalités pour tout entier naturel n :

$$u_n \leqslant \text{M}_{\text{min}} \overset{\times 3}{\Leftrightarrow} 3u_n \leqslant 3\text{M}_{\text{min}} \overset{\sqrt{\ }}{\Leftrightarrow} \sqrt{3u_n} \leqslant \sqrt{3\text{M}_{\text{min}}} \Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant \sqrt{3\text{M}_{\text{min}}}$$

  Donc $\sqrt{3\text{M}_{\text{min}}}$ est un majorant, comme M_{min} est le plus petit :

$$\text{M}_{\text{min}} \leqslant \sqrt{3\text{M}_{\text{min}}} \Leftrightarrow \text{M}_{\text{min}}^2 \leqslant 3\text{M}_{\text{min}} \overset{\div \text{M}_{\text{min}}}{\Leftrightarrow} \text{M}_{\text{min}} \leqslant 3$$

- **Synthèse** : Montrons par récurrence que 3 est un majorant de la suite (u_n).
  Soit la proposition : $u_n \leqslant 3$

  Initialisation : $u_0 = 1 \leqslant 3$. La proposition est initialisée.

  Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leqslant 3$, montrons que $u_{n+1} \leqslant 3$

$$u_n \leqslant 3 \overset{\times 3}{\Rightarrow} 3u_n \leqslant 9 \overset{\sqrt{\ }}{\Rightarrow} \sqrt{3u_n} \leqslant 3 \Rightarrow u_{n+1} \leqslant 3$$

  La proposition est héréditaire.

  Par initialisation et hérédité, la suite est majorée par 3.