

Limites

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Tout intervalle $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand i.e. pour $x \in]A; +\infty[$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ **asymptote horizontale** $y = \ell$

Tout intervalle ouvert contenant ℓ , contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand i.e. pour $x \in]A; +\infty[$.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ **asymptote verticale** $x = a$

tout intervalle $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a i.e. $x \in]a - \epsilon; a + \epsilon[$.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

Tout intervalle ouvert contenant ℓ , contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a i.e. $x \in]a - \epsilon; a + \epsilon[$.

Opérations sur les limites

On peut calculer les limites par somme, produit et quotient sauf dans les 4 cas suivants. Dans ces cas, on changera la forme de la fonction ou on utilisera des limites de référence (voir fonctions exp et ln)

- 1) $+\infty - \infty$: On essaiera de mettre la fonction sous la forme d'un produit.
- 2) $0 \times \infty$: On essaiera de mettre la fonction sous la forme d'une somme.
- 3) $\frac{0}{0}$: On simplifiera la fonction dans le cas d'une fonction rationnelle ou on essaiera de passer par le nombre dérivé si la fonction est dérivable.
- 4) $\frac{\infty}{\infty}$: On mettra en facteur le terme prépondérant du numérateur et du dénominateur.

Théorème des gendarmes et de comparaison

$f, g,$ et h sont trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a (réel, $+\infty$ ou $-\infty$)

Théorème des « Gendarmes »

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in I, g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

Théorème de comparaison

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in I, f(x) \geq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in I, f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} h(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Continuité

Soit f définie sur un intervalle ouvert I contenant a . La fonction f est **continue** en a si et seulement si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

La fonction f est **continue sur un intervalle I** si, et seulement si, f est continue en tout point de I .

Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par une courbe **en un seul morceau**.

\triangle f continue en $a \not\Rightarrow f$ dérivable en a

Limites, Continuité, Dérivabilité

Dérivabilité

Soit f définie sur un intervalle ouvert I contenant a . f est dérivable en a si et seulement si le taux d'accroissement de la fonction f en a admet une limite finie en a que l'on appelle nombre dérivé de f en a

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Théorème : f dérivable en $a \Rightarrow f$ continue en a

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit une fonction f définie sur $I = [a, b]$.

- Si f **continue et strictement monotone** sur $I = [a, b]$.
- et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
- alors l'équation $f(x) = k$ admet une **unique solution** dans $I = [a, b]$.

Pour l'équation $f(x) = 0$, on montrera que $f(a)f(b) < 0$.

On peut généraliser ce théorème à un **intervalle ouvert borné ou non**.

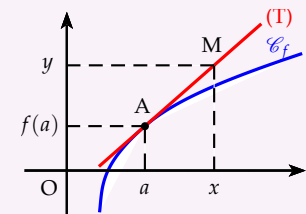
Variation et extremum

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I contenant a .

- Si $\forall x \in I, f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est **strictement croissante** sur I .
- Si $\forall x \in I, f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est **strictement décroissante** sur I .
- Si $f'(a) = 0$ et si f' **change de signe en a** alors la fonction f admet un **extremum local** en a .

Tangente

Si f est dérivable en a , la courbe \mathcal{C}_f admet au point a une tangente de coefficient directeur $f'(a)$ d'équation :



$$(T) y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Limite d'une fonction composée et quelques exemples de limites

Soit deux fonctions f, g . Soient a, b et c réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = c$$

Exemples de limites

1) Soit $f(x) = \ln(e^x + 2)$. Limite de f en $+\infty$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par composition} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

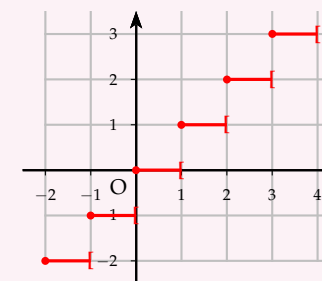
2) Soit $f(x) = \frac{10x}{e^x + 1} = \frac{x}{e^x} \times \frac{10}{1 + e^{-x}}$. Limite de f en $+\infty$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{1 + e^{-x}} = 10 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par produit} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{array}$$

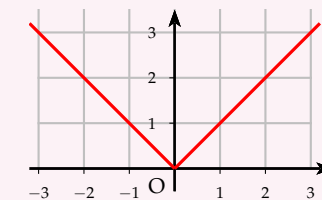
Compléments : cas de discontinuité et de non dérivabilité

- Le cas le plus fréquent de **discontinuité** consiste à un « saut » de la fonction autour d'une valeur comme c 'est le cas par exemple de la fonction E, partie entière d'un réel x , autour de chaque valeur entière.

$$\text{Si } n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z} \text{ alors } E(x) = n$$



- Un cas de **non dérivabilité** se rencontre lorsqu'en un point la dérivée à droite est différente de la dérivée à gauche. Sur la courbe, on observe alors un **point anguleux**. C'est le cas par exemple de la fonction valeur absolue en 0. Le nombre dérivé à droite vaut 1 et à gauche -1 .



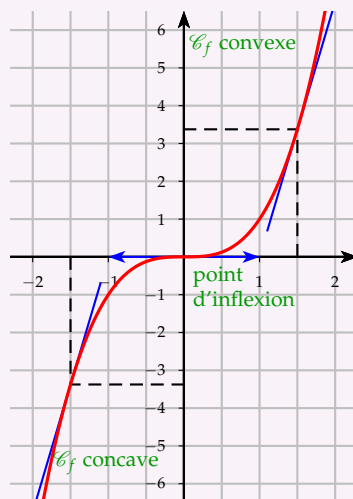
⚠ La fonction valeur absolue est **continue et non dérivable** en 0

Concavité et point d'inflexion

(Notion maintenant hors programme)

Lorsque f' s'annule sans changer de signe en a , f n'admet pas d'extremum en a mais un **point d'inflexion**. C'est le cas de la fonction cube en 0.

- Une courbe \mathcal{C}_f est **convexe** sur I , lorsque que ses tangentes sont en dessous de la courbe. La dérivée seconde f'' est alors positive.
- Une courbe \mathcal{C}_f est **concave** sur I , lorsque que ses tangentes sont au dessus de la courbe. La dérivée seconde f'' est alors négative.
- Un **point d'inflexion** d'une courbe \mathcal{C}_f , est le point de la courbe où il y a changement de concavité. La dérivée seconde f'' est alors nulle.



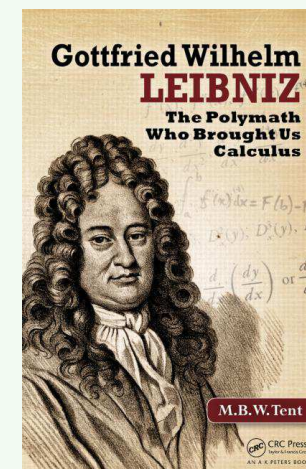
Culture

La notion de **dérivabilité** a mis plus de deux siècles avant d'être bien résolue.

Le problème de la dérivée s'est posé à l'époque de Newton dans le calcul de la vitesse instantanée. Newton et Leibniz calculaient alors la vitesse instantanée comme une petite variation du déplacement dx d'un point M sur un axe Ox sur une petite variation de temps dt .

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}(t) \text{ notation différentielle}$$

Les calculs sur des petites quantités, considérées parfois comme très petites mais non nulles, parfois comme nulles, a donné le **calcul infinitésimal**. Ce calcul a été abandonné par manque de rigueur au profit du calcul sur les limites.



Leibniz (1646-1716)