

Définition

$\ln :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln(x)$

La fonction « ln » peut être définie comme la **fonction réciproque** de la fonction « exp ».

Remarque : En termes simples, les effets des fonctions **ln** et **exp** se compensent.

Comportement aux bornes de $]0; +\infty[$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
 $x = 0$ est asymptote verticale à \mathcal{C}_{\ln} au voisinage de 0.

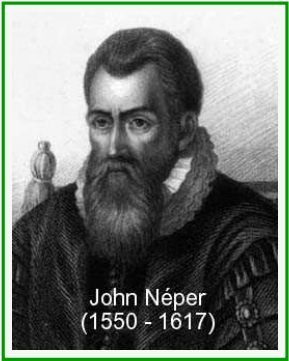
Carte d'identité de la fonction « ln »

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x)$			+	
$\ln(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

$T_1 : y = x - 1$
 $T_e : y = \frac{1}{e}x$

Mathématiquement

- $]0; +\infty[\xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \xrightarrow{\exp}]0; +\infty[$
 $x \mapsto \ln x \mapsto e^{\ln x} = x$
 $\exp \circ \ln = \text{Id}_{]0; +\infty[}$
- $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp}]0; +\infty[\xrightarrow{\ln} \mathbb{R}$
 $x \mapsto e^x \mapsto \ln(e^x) = x$
 $\ln \circ \exp = \text{Id}_{\mathbb{R}}$



« ln » est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$
 La fonction **ln** est donc continue sur $]0; +\infty[$.

$\forall x \in]0; +\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$

La fonction « ln » est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Remarque : On peut définir la fonction logarithme comme la fonction f dont la dérivée vaut $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f(1) = 0$

Propriétés algébriques

- $\forall x, y \in]0; +\infty[, \ln xy = \ln x + \ln y$
- $\forall x \in]0; +\infty[, n \in \mathbb{Z}, \ln x^n = n \ln x$
- $\forall x, y \in]0; +\infty[, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

Cas particulier : $\forall y > 0, \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y$

- $\forall x \in]0; +\infty[, \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$

Remarque : Historiquement la création de la fonction logarithme est dû à la « relation fonctionnelle » qui consiste à transformer un produit en somme.

Limites de référence à connaître et à reconnaître !

Croissance comparée

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

Variation en 1

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$

⚠ sans ces théorèmes, on aurait des formes indéterminées

Résolution d'équations et d'inéquations

• $\forall a, b > 0, \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

On dit que la fonction \ln réalise une bijection de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R}

• $\forall x > 0, \ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$

• **Changements de variables** : le plus fréquent étant $X = \ln x$
Le but est de se ramener à un problème simple (second degré, ...)

• $\forall a, b > 0, \ln a \geq \ln b \Leftrightarrow a \geq b$
Car la fonction \ln est croissante sur $]0; +\infty[$.

△ Avant de résoudre une équation ou une inéquation impliquant « \ln » penser à déterminer le domaine d'existence de cette équation ou cette inéquation.

Composée avec la fonction \ln

$$\ln \circ u : x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{\ln} \ln[u(x)]$$

• $\ln[u(x)]$ existe ssi $x \in D_u$ et $u(x) > 0$.

• Si I est un intervalle non vide et si u est dérivable sur I et à valeur dans $]0; +\infty[$, alors $\ln \circ u$ est dérivable sur I

$$\forall x \in I, (\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ alors $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

Culture

1) Fonction logarithmes en base $a > 0$

$$\log_a :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \times \ln x$$

- Si $a = e$, on retrouve la fonction logarithme népérien (standard pour les anglo-saxons)
- Si $a = 10$ on note $\log_{10} = \log$, la fonction logarithme décimal rencontré en physique et en chimie.

2) Quelques conséquences des relations fonctionnelles régissant « \ln » et « \exp »

- Si (u_n) est une suite **géométrique à termes strictement positifs** ($\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$) alors $(\ln u_n)$ est une suite **arithmétique** de premier terme $\ln u_0$ et de raison $r = \ln q$. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln u_n = \ln(u_0 \times q^n) = \ln u_0 + \ln q^n = \ln u_0 + n \ln q$$

- Si (u_n) est une suite **arithmétique** ($\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$) alors (e^{u_n}) est une suite **géométrique** de premier terme e^{u_0} et de raison $q = e^r$. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e^{u_n} = e^{u_0 + nr} = e^{u_0} \times e^{nr} = e^{u_0} \times (e^r)^n$$