Probabilités conditionnelles
Loi binomiale

Équiprobabilité et variable aléatoire

EXERCICE 1

Une urne contient 5 boules indiscernables, 3 rouges et 2 vertes.
On tire au hasard et simultanément deux boules.

1) Calculez les probabilités des événements
   - R « les deux boules sont rouges » ;
   - V « les deux boules sont vertes ».
2) On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules vertes obtenues.
   - Trouvez la loi de probabilité de X.
   - Calculez E(X).

EXERCICE 2

On club de randonnée propose à ses adhérents une sortie payante suivant les tarifs indiqués ci-dessous.

Catégorie	A (adultes)	J (jeunes)	E (enfants)
Sortie	20 €	13 €	7 €
Repas	12 €	7 €	4 €

Le club a inscrit 87 participants pour cette sortie dont 58 adultes et 12 enfants.
La moitié des adultes, un quart des enfants et 10 jeunes ont apporté leur propre pique-nique.
On choisit au hasard un participant. On note X la variable aléatoire qui indique le prix payé au club par un participant.

1) Faire un arbre d'effectifs suivant la catégorie du participant et suivant qu'il emporte son pique-nique ou non.
2) Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?
3) a) Dresser le tableau de la loi de probabilité de X.
   b) Sur quel tarif moyen par adhérent peut compter le club s'il renouvelle un grand nombre de fois ce type de sortie dans les même condition ?

Probabilités conditionnelles

EXERCICE 3

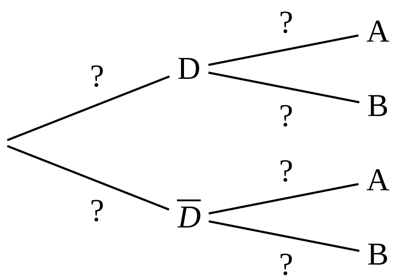
Deux ateliers A et B fabriquent des puces électroniques. Pour une commande de 2 000 pièces, A en a produit 60% et B en a produit 40%. L'atelier A produit 4% de puces défectueuses et B en produit 3%. On prend une puce au hasard dans la commande. On appelle A l'événement « la puce provient de l'atelier A », B l'événement « elle provient de l'atelier B » et D l'événement « elle est défectueuse ».

1) Compléter la tableau suivant qui décrit la composition de la commande :

	nombre de puces défectueuses	nombre de puces non défectueuses	total
nombre de puces produit par A			
nombre de puces produit par B			
total			

2) Calculer les probabilités suivantes :
   a) $p(\mathrm{D})$, $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{D})$ et $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{A})$
   b) $p(\overline{\mathrm{D}})$, $p(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{B})$ et $p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{B})$

   c) Remplir l'arbre suivant :



Exercice 4

1) A et B sont tels que $p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{2}$, $p(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{4}$ et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{1}{10}$
   Calculer $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.

2) A et B sont tels que $p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{2}$, $p(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{3}$ et $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \dfrac{2}{3}$
   Calculer $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.

3) A et B sont tels que $p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{3}$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{4}$ et $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{2}$
   Calculer $p(\mathrm{B})$.

4) A et B sont tels que $p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{2}$, $p(\mathrm{B}) = \dfrac{3}{4}$ et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{2}{5}$
   a) $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$
   b) Calculer $p(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}})$. En déduire $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{B}})$.

Exercice 5

À la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que :

- 65% de la population concernée est contre la construction de ce barrage et parmi ces opposants, 70% sont des écologistes ;
- parmi les personnes non opposées à la construction, 20% sont des écologistes.

On interroge une personne au hasard.

1) Écrire les probabilités correspondantes aux données puis construire un arbre pondéré.
2) Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage et soit écologiste.

3) Calculer la probabilité qu'une personne interrogée ne soit pas opposée et soit écologiste.

4) En déduire la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.

Exercice 6

Un tiroir T_1 contient cinq pièces d'or et cinq pièces d'argent, un tiroir T_2 en contient quatre d'or et six d'argent. On choisit au hasard l'un des tiroirs et dans ce tiroir, on prend une pièce au hasard.

1) Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2) Calculer la probabilité de prendre une pièce d'or
   - du tiroir T_1 ;
   - du tiroir T_2.

3) Calculez la probabilité de prendre une pièce d'or.

4) On a extrait une pièce d'or. Quelle est alors la probabilité qu'elle provienne du tiroir T_1 ? Pouvait-on le prévoir ?

Exercice 7

Le personnel d'un hôpital est réparti en trois catégories : M (médecins), S (soignants non médecins) et AT (personnel administratif ou technique).

- 12% sont des médecins et 71% des soignants.
- 67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.

On interroge au hasard un membre du personnel

1) Écrire les probabilités correspondantes aux données puis construire un arbre pondéré.

2) Quelle est la probabilité que la personne interrogée soit une femme soignante ? une femme médecin ?

3) On sait que 80% du personnel est féminin.
   - Calculer la probabilité que la personne interrogée soit une femme AT.
   - En déduire la probabilité que la personne interrogée soit une femme sachant que cette personne interrogée est AT.

Exercice 8

Un lot de cent dés contient vingt dés pipés. Pour un tel dé, la probabilité d'apparition du 6 est égale à $\frac{1}{2}$. Les autres dés sont parfaits.

1) On prend au hasard un dé, on le lance. Calculer la probabilité de l'événement S «on obtient 6 ».

2) On prend au hasard un dé, on le lance, on obtient 6. Calculer la probabilité que le dé soit pipé.

Exercice 9

Le quart de la population d'un pays a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte $\frac{1}{12}$ de malades. Parmi les malades, $\frac{1}{5}$ n'est pas vacciné.

1) Calculer :
   a) la probabilité qu'une personne malade soit vacciné ;
   b) la probabilité qu'une personne soit vaccinée et malade ;
   c) la probabilité qu'une personne soit malade.
2) En déduire la probabilité qu'une personne non-vaccinée tombe malade. Que pouvez-vous en déduire ?

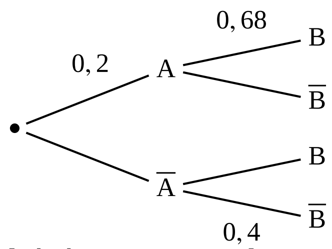
Exercice 10

Une étude épidémiologique concernant une certaine maladie a été faite dans des familles ayant deux enfants de moins de dix ans : une fille et un garçon. On a constaté que 20 % des filles et 50 % des garçons sont touchés par la maladie. Par ailleurs, dans les familles dont la fille est malade, le garçon l'est aussi dans 70 % des cas. On notera :
- F l'événement « la fille de la famille est atteinte par la maladie » ;
- G l'événement « le garçon de la famille est atteint par la maladie. »

On choisit au hasard une famille ayant fait l'objet de cette étude. Quelle est la probabilité que :
1) A « les deux enfants soient atteints par la maladie » ;
2) B « au moins l'un des deux enfants soit atteint » ;
3) C « aucun des deux enfants ne soit atteint » ;
4) D « la fille soit atteinte sachant que le garçon l'est » ;
5) E « la fille soit atteinte sachant que le garçon n'est pas atteint. »
6) H « le garçon soit atteint sachant que la fille n'est pas atteinte. »

Exercice 11

On considère l'arbre de probabilités suivant :



Affirmation : la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est égale à 0,32.
Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? On se justifiera

Exercice 12

Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
On appelle A l'événement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'événement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».
On suppose que les événements A et F sont indépendants.
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à $0,02$ et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à $0,069$.
On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?

Indépendance

Exercice 13

Un dé cubique truqué est tel que la probabilité de sortie d'un numéro k est proportionnelle à k. On lance ce dé et on considère les événements :

- A « le numéro est pair » ;
- B « le numéro est supérieur ou égal à 3 » ;
- C « le numéro obtenu est 3 ou 4 »

a) Calculez les probabilités de A, B, C.

b) Calculez la probabilité conditionnelle $p_{\mathrm{A}}(B)$.

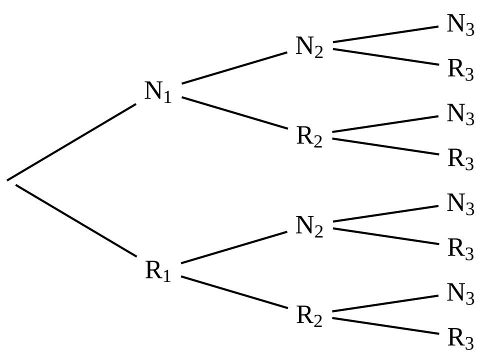
c) A et B sont-ils indépendants ? A et C ?

Exercice 14

Réunion juin 2005

On considère trois urnes U_1, U_2, et U_3.
L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.
Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.
Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'événement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1) Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2) a) Calculer la probabilité des événements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$, et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.

   b) En déduire la probabilité de l'événement $N_1 \cap N_3$.

   c) Calculer de façon analogue la probabilité de l'événement $R_1 \cap N_3$.

3) Déduire de la question précédente que $p(N_3 = \dfrac{2}{5}$.

4) Les événements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?

5) Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 15

Polynésie juin 2006

On a posé à 1 000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ». Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

Retards le 1er mois / Retards le 2e mois	0	1	2 ou plus	Total
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1 000

1) On choisit au hasard un individu de cette population.
   a) Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois,
   b) Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.
2) On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul). On fait les hypothèses suivantes :
   - si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,46.
   - si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,66.
   - si l'individu a eu deux retards ou plus le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est encore 0,66.

   On note A_n, l'événement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n », B_n, l'événement « l'individu a eu exactement un retard le mois n », C_n, l'événement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ». Les probabilités des événements A_n, B_n, C_n sont notées respectivement p_n, q_n et r_n.
   a) Pour le premier mois ($n = 1$), les probabilités p_1, q_1 et r_1 sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités p_1, q_1 et r_1.
   b) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n, et r_n. On pourra s'aider d'un arbre.
   c) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0,2p_n + 0,66$.
   d) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0,55$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
   e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Loi binomiale

Exercice 16

1) On tire successivement avec remise 8 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 5 rois ?
2) Un QCM comprend 10 questions auxquelles on répond « Vrai » ou « Faux ». Un élève répond au hasard à toutes les questions. A-t-il autant de chances de répondre exactement à 3 questions que de répondre exactement à 7 ?

3) On lance 8 fois un dé parfait.
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois fois un nombre pair ?

Exercice 17

Pour les questions suivantes, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p : $b(n, p)$.

1) $n = 6$ et $p = 0,4$. Donner la loi de probabilité de X.
2) $n = 10$ et $E(X) = 3$. Calculer $P(X \leqslant 3)$ et $P(X \geqslant 7)$.
3) $p = 0,2$ et $\sigma(X) = 2$. Calculer $P(X \leqslant 2)$ et $P(X > 2)$

Exercice 18

Deux joueurs A et B s'affrontent dans un tournoi de tennis de table. La probabilité que A gagne une partie est de 0,6. On joue 9 parties, le vainqueur est celui qui gagne le plus de parties.
Quelle est la probabilité que B gagne le tournoi ?

Exercice 19

Pondichéry avril 2009

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\dfrac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1) On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.
   a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
   b) Quelle est son espérance ?
   c) Calculer $P(X = 2)$.
2) On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.
   On considère les événements D et A suivants :
   - D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
   - A : « obtenir exactement deux 6 ».

   a) Calculer la probabilité des événements suivants :
      - « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
      - « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

      (On pourra construire un arbre de probabilité).
   b) En déduire que : $p(A) = \dfrac{7}{48}$.
   c) Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3) On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

   On note B_n l'événement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

   a) Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement B_n.

   b) Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.

Exercice 20

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92% des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95% réussissent le test de solidité ;
- 2% des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'événement : « le jouet est sans défaut de finition »
- S l'événement : « le jouet réussit le test de solidité »

1) **Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation**

   a) En utilisant l'énoncé, préciser : $P(F)$; $P_F(S)$ et $P(\overline{F} \cap \overline{S})$.

   b) Démontrer que $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = \dfrac{1}{4}$.

   c) Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2) **Calcul de probabilités**

   a) Démontrer que $P(S) = 0,934$.

   b) Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième.)

3) **Etude d'une variable aléatoire B**

   Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont remis au rebut (donc ne rapporte aucun euro), les autres jouets rapportent un bénéfice de 5€.

   On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

   a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

   b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

4) **Étude d'une nouvelle variable aléatoire**.

   On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets.

   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.

   Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

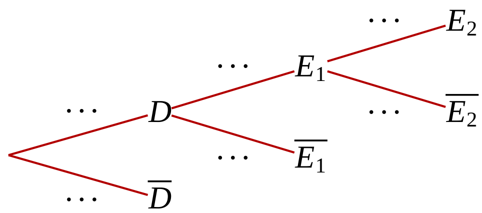
Exercice 21

Métropole juin 2012

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1) On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
   On considère les événements suivants :
   - D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
   - E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
   - E_2 : « Le candidat est recruté ».

   a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   b) Calculer la probabilité de l'événement E_1.

   c) On note F l'événement « Le candidat n'est pas recruté ».
   Démontrer que la probabilité de l'événement F est égale à $0,93$.

2) Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.
   On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

   a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

   b) Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3) Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

Exercice 22

N^lle^ Calédonie mars 2012

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.
L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.
Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.
On considère les événements suivants :
A : « obtenir 1 en lançant le dé »
B : « obtenir une boule noire ».

1) a) Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.

   b) Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{3}{8}$.

   c) Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.

2) On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

   a) Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

   b) Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

   c) On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X < k)$	0,009 1	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,992 2	0,999 0	0,999 9

   Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'événement : « la personne gagne au moins N parties ».

   À partir de quelle valeur de N la probabilité de cet événement est-elle inférieure à $\frac{1}{10}$?

Exercice 23

Partie A

On considère l'algorithme ci-contre.

Dans l'expérience aléatoire simulée par cet l'algorithme , on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée.

1) Quelle loi suit la variable X ? Préciser ses paramètres.

2) Déterminer les probabilités des événements suivants :

   a) B : C est égal à trois.

   b) D : C est supérieur à 3

3) Déterminer l'espérance mathématique de X

Variables : A, C et I entiers naturels
Entrées et initialisation
    0 → C
Traitement
    pour I de 1 à 9 **faire**
        entAléa(1,7) → A   (*)
        si A > 5 **alors**
            C + 1 → C
        fin
    fin
Sorties : Afficher C

(*) La fonction entAléa(a,b) consiste à prendre un entier aléatoire compris entre a et b

Partie B

On décide de vérifier la valeur de l'espérance mathématique de X par une simulation de N expériences. On propose l'algorithme ci-contre qui reproduit N expériences. On met alors les résultats successifs de C dans une liste. On calcule alors la moyenne des valeurs obtenues dans cette liste L_1. Pour obtenir cette moyenne faire stats CALC Stats 1-Var puis taper L_1. La moyenne est alors $\overline{x}$.

1) Effectuer les simulations pour les valeurs de N : 10, 50, 100, 500. Pour cette dernière soyez un peu patient. Remplir alors le tableau suivant :

N	10	50	100	500
$\overline{x}$				

2) Cette simulation permet-elle de confirmer la valeur de l'espérance mathématique de X

Variables : A, C, I et K entiers naturels
    L_1 liste
Entrées et initialisation
    Lire N
    Effacer liste L_1
Traitement
    pour K de 1 à N **faire**
        $0 \to C$
        pour I de 1 à 9 **faire**
            entAléa(1,7) $\to$ A
            si A > 5 **alors**
                $C + 1 \to C$
            fin
        fin
        $C \to L_1(K)$
    fin
Sorties : Afficher L_1

Exercice 24

Antilles-Guyane septembre 2011

Les parties A et B sont indépendantes

Un site internet propose des jeux en ligne.

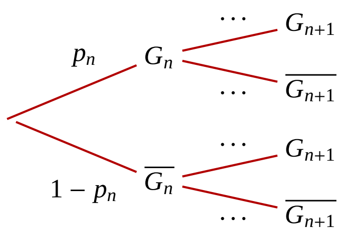
Partie A :

Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est de $\dfrac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est de $\dfrac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'événement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'événement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5}$.

3) Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \dfrac{1}{4}$.

   a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.

   b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{4}$.

   c) Déterminer la limite de p_n.

Partie B :

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.
On suppose que toutes les parties sont indépendantes.
La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1) a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
   b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.
   c) Déterminer l'espérance de X.
2) Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.
   a) Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.
   b) Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 € ? Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.

EXERCICE 25

Métropole juin 2013

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1) Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
   On envisage les événements suivants :
   - H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
   - H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
   - H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
   - C : « l'arbre choisi est un conifère »,
   - F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

   a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
   b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.
   c) Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à $0,525$.
   d) L'arbre choisi est un conifère.
   Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2) On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.
   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.
   a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ? On arrondira à 10^{-3}.
   c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ? On arrondira à 10^{-3}.

EXERCICE 26

Pondichéry avril 2013

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

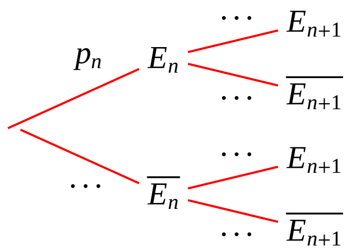
- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'événement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'événement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1) a) Déterminer la valeur de p_3 Ã l'aide d'un arbre de probabilité.

   b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2) a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



   b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
   $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

   c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison q.
   En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

   d) En déduire la limite de la suite (p_n).

   e) On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme ci-contre :

   À quoi correspond l'affichage final J ?
   Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?
   On pose K = 3, déterminer J.

Variables : K et J entiers naturels P réel
Entrées et initialisation
   $0 \to$ P
   $1 \to$ J
   Saisir K
Traitement
   tant que P $< 0,05 - 10^{-\mathrm{K}}$ **faire**
      $0,2\mathrm{P} + 0,04 \to$ P
      $\mathrm{J} + 1 \to$ J
   fin
Sorties : Afficher J

3) Cette entreprise emploie 220 salariés. On admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$. On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues. On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

   a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

   b) Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$.