

Révision : Complexes et géométrie dans l'espace

EXERCICE 1

Liban mai 2014

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1 + i)z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

- 1) Calculer u_0 .
- 2) Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
- 3) Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
- 4) Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- 5) Étant donné un réel positif p , on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.

Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n .

Variables	:	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

Partie B

- 1) Déterminer la forme algébrique de z_1 .
- 2) Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + i$.
En déduire la forme exponentielle de z_1 .
- 3) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

EXERCICE 2

Amérique du Nord mai 2014

On considère un cube ABCDEFCH donné en annexe (à rendre avec la copie).

On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

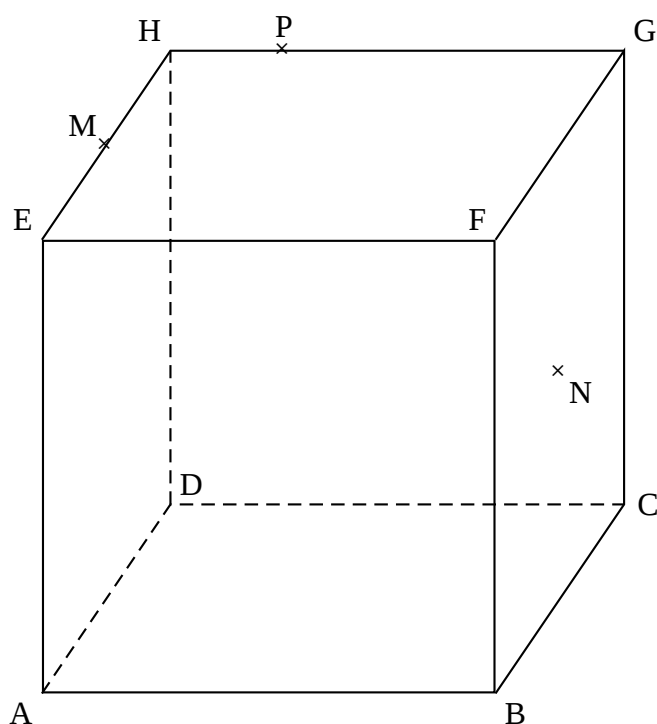
Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

- 1) Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
Construire le point L
- 2) On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
 - a) Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
 - b) Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
- 3) En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

- 1) Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
- 2) Déterminer les coordonnées du point L.
- 3) On admet que le point T a pour coordonnées $(1 ; 1 ; \frac{5}{8})$.
Le triangle TPN est-il rectangle en T ?



EXERCICE 3**Liban mai 2014**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $x - y + 3z + 1 = 0$

et la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

On donne les points $A(1 ; 1 ; 0)$, $B(3 ; 0 ; -1)$ et $C(7 ; 1 ; -2)$

Proposition 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :
$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Proposition 2 :

Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 :

Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 :

La droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}$ au point E de coordonnées $(8 ; -3 ; -4)$.

Proposition 5 :

Les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont parallèles.