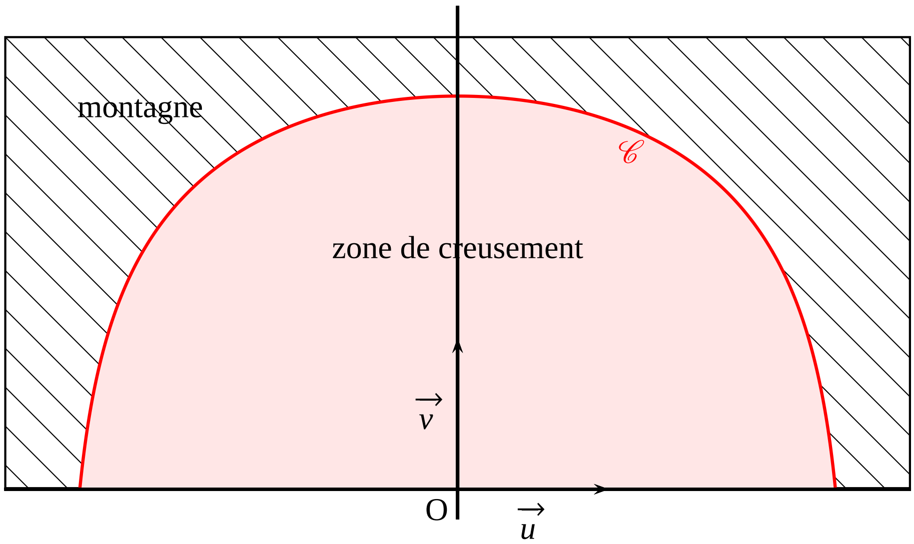
Révision : Fonctions exponentielle et logarithme

EXERCICE 1

Pondichéry avril 2017

Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne.
Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante : dans un repère orthonormal, d'unité 2 m, la zone de creusement est la surface délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.



On admet que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2,5\ ;\ 2,5]$ par :

$$f(x) = \ln\left(-2x^2 + 13,5\right).$$

L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Partie A : Étude de la fonction f

1) Montrer que f est dérivable sur $[-2,5\ ;\ 2,5]$ puis calculer $f'(x)$.
2) Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur $[-2,5\ ;\ 2,5]$.
En déduire le signe de f sur $[-2,5\ ;\ 2,5]$.

Partie B : Aire de la zone de creusement

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

1) La courbe $\mathscr{C}$ est-elle un arc de cercle de centre O ? Justifier la réponse.
2) Justifier que l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est : $\mathscr{A} = 8\displaystyle\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3) L'algorithme, ci dessous, permet de calculer une valeur approchée par défaut de $I = \displaystyle\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$, notée a. On admet que : $a \leqslant I \leqslant a + \dfrac{f(0) - f(2,5)}{n} \times 2,5$.

Variables : R, S réels
n, k entiers
Entrées et initialisation
S prend la valeur 0
Demander la valeur n
Traitement
pour k variant de 1 à n **faire**
R prend la valeur $\dfrac{2,5}{n} \times f\left(\dfrac{2,5}{n} \times k\right)$
S prend la valeur $R + S$
fin
Sorties : Afficher S

a) Le tableau ci-dessous, donne différentes valeurs obtenues pour R et S lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.
Compléter ce tableau en calculant les six valeurs manquantes.

Initialisation	$S = 0$, $n = 50$		
Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	...	...
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	...
	$\vdots$		$\vdots$
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	$\vdots$		$\vdots$
	49	0,020 106	5,197 538
	50	...	...
Affichage	$S = \ldots$		

b) En déduire une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Exercice 2

Antilles-Guyane juin 2015

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

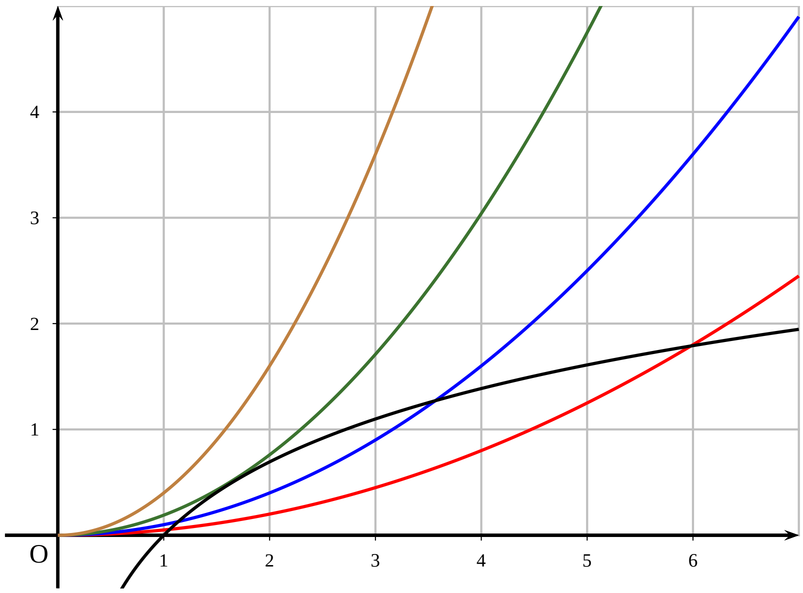
Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0\,;+\infty[$ la fonction g_a par : $g_a(x) = ax^2$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a.

Partie A

On a construit ci-après les courbes $\mathscr{C}$, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.

1) Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.
2) Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.



Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $h_a(x) = \ln x - ax^2$.

1) Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a si et seulement si $h_a(x) = 0$.

2) a) On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et on note h'_a la dérivée de la fonction h_a sur cet intervalle.
Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous.
Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h_a(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{-1-\ln(2a)}{2}$	↘	

b) Rappeler la limite de $\dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$.
On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.

3) Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 0,1$.

a) Justifier que, dans $\left]0\,;\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution.

On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\,;\,+\infty\right[$.

b) Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,1}$?

4) Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = \dfrac{1}{2e}$.

a) Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2e}}$.

b) En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$. Justifier.

5) Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ? Justifier.

Exercice 3

Pondichéry avril 2014

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

f est la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par : $f(x) = 2x\ln(2x+1)$.

1) **Proposition 1** : Sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, l'équation $f(x) = 2x$ a une unique solution : $\dfrac{e-1}{2}$.

2) **Proposition 2** Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est : $1 + \ln 4$.

Exercice 4

Antilles-Guyane sept 2014

On considère l'équation (E_1) : $e^x - x^n = 0$

x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1) Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) : $\ln x - \dfrac{x}{n} = 0$

2) Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?