Révision : suites, raisonnement par récurrence

EXERCICE 1

Amérique du Sud nov 2016

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.

1) a) À l'aide du calcul des premiers termes de la suite (u_n), conjecturer la forme explicite de u_n en fonction de n. Démontrer cette conjecture.

   b) En déduire la valeur de la limite ℓ de la suite (u_n).

2) Compléter l'algorithme ci-dessous permettant de déterminer la valeur du plus petit entier n tel que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 10^{-3}$.

```
Variables : n : entier  et  a, b : réels
Entrées et initialisation
    n prend la valeur 0
    a prend la valeur 0
    b prend la valeur 0,5
Traitement
    tant que |b − a| ...... faire
        n prend la valeur ......
        a prend la valeur ......
        b prend la valeur ......
    fin
Sorties : Afficher ......
```

EXERCICE 2

Polynésie juin 2016

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.

On considère la suite v définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.

1) Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2) Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

Exercice 3

Antilles-Guyane septembre 2015

1) On définit une suite (u_n) de réels strictement positifs par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad \ln u_{n+1} = \ln u_n - 1.$$

La suite (u_n) est-elle géométrique ?

2) Soit (v_n) une suite à termes strictement positifs.
On définit la suite (w_n) par, pour tout entier naturel n, $w_n = 1 - \ln v_n$.
La proposition $(\mathcal{P})$ suivante est-elle vraie ou fausse ?

$$(\mathcal{P}) : \text{si la suite } (v_n) \text{ est majorée alors la suite } (w_n) \text{ est majorée.}$$

3) La suite (z_n) de nombres complexes est définie par :

$$z_0 = 2 + 3i \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ par } z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4}\right) z_n.$$

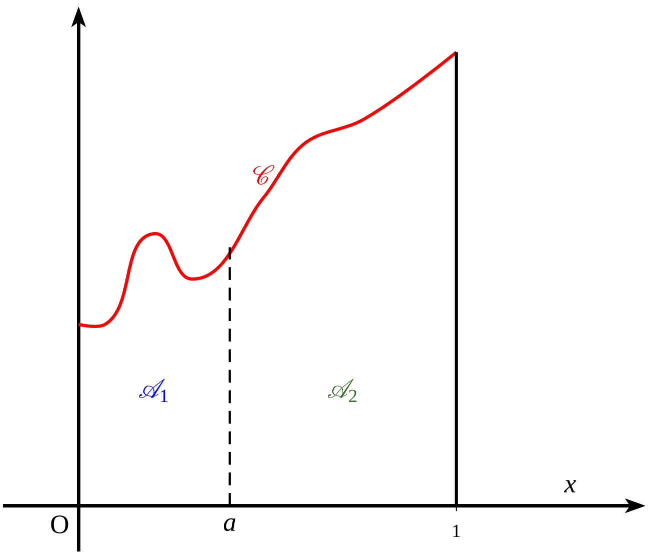
Pour quelles valeurs de n, $|z_n|$ est-il inférieur ou égal à 10^{-20} ?

Exercice 4

Centres étrangers juin 2016

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0~;~1]$, continue et positive sur cet intervalle, et a une réel tel que $0 < a < 1$.
On note :

- $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal :
- $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$ d'autre part.
- $\mathscr{A}_2$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$ d'autre part.



Le but de cet exercice est de déterminer, pour différentes fonctions f, une valeur du réel a vérifiant la condition (E) : « les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales ».
On admet l'existence d'un tel réel a pour chacune des fonctions considérées.

Partie A : Étude de quelques exemples

1) Vérifier que dans les cas suivants, la condition (E) est remplie pour un unique réel a et déterminer sa valeur.
   a) f est une fonction constante strictement positive.
   b) f est définie sur $[0~;~1]$ par $f(x) = x$.

2) a) À l'aide d'intégrales, exprimer, en unités d'aires, les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.

b) On note F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
Démontrer que si le réel a satisfait la condition (E), alors $F(a) = \dfrac{F(0) + F(1)}{2}$.
La réciproque est-elle vraie ?

3) Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.

a) La fonction f est définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par : $f(x) = e^x$.
Vérifier que la condition (E) est vérifiée pour un unique réel a et donner sa valeur.

b) La fonction f définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$.
Vérifier que la valeur $a = \dfrac{2}{5}$ convient.

Partie B : Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par : $f(x) = 4 - 3x^2$.

1) Démontrer que si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation : $x = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$.

Dans la suite de l'exercice, on admettra que cette équation a une unique solution dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. On note a cette solution.

2) On considère la fonction g définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$ et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Calculer u_1.

b) Démontrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

d) Prouver que la suite (u_n) est convergente.
À l'aide des opérations sur les limites, prouver que la limite est a.

e) On admet que le réel a vérifie l'inégalité $0 < a - u_{10} < 10^{-9}$.
Calculer u_{10} à 10^{-8} près.