Révision : les nombres complexes

EXERCICE 1

Pondichéry avril 2017

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) On considère l'équation : (E) : $z^2 - 6z + c = 0$.
   où c est un réel strictement supérieur à 9.

   1) Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.
   2) Justifier que les solutions de (E) sont $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.

2) On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B.
   Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.
3) Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

EXERCICE 2

Liban mai 2016

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose : $Z = \dfrac{iz}{z-2}$.

1) **Affirmation 1 :** L'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est une droite passant par le point A(1 ; 0).
2) **Affirmation 2 :** Z est un imaginaire pur si et seulement si z est réel.

EXERCICE 3

Amérique du Nord juin 2016

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe $4i$ et les points C et D tels que ABCD est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1+i)^n$.

1) Écrire le nombre $1 + i$ sous forme exponentielle.
2) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.

EXERCICE 4

Nouvelle-Calédonie nov 2016

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par : $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1) On appelle A le point d'affixe $a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   a) Déterminer la forme exponentielle de a.
   b) Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.
2) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.
3) Soit M un point d'affixe z du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
   a) Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec θ un nombre réel.
   b) Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.
4) Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

Exercice 5

Centres étrangers juin 2016

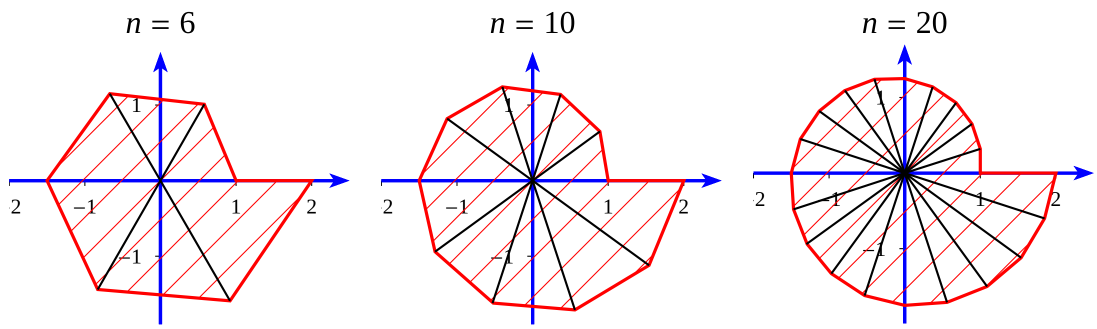
On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(\text{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n, on définit les nombres complexes $z_k = \left(1 + \dfrac{k}{n}\right) e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et on note M_k le point d'affixe z_k.

Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

Par exemple, pour les entiers $n = 6$, $n = 10$ et $n = 20$, on obtient les figures ci-dessous.



Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$. Ainsi, pour $0 \leqslant k \leqslant 6$, on a $z_k = \left(1 + \dfrac{k}{6}\right) e^{i\frac{2k\pi}{6}}$.

1) Déterminer la forme algébrique de z_1.
2) Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.
3) Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B : Ligne brisée formée à partir de $n+1$ points

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminer la longueur OM_k.

2) Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$,

   déterminer une mesure des angles $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{OM}_k}\right)$ et $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{OM}_{k+1}}\right)$.

   En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OM}_k}\ ;\ \overrightarrow{\text{OM}_{k+1}}\right)$.

3) Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle $\text{OM}_k\text{M}_{k+1}$ est égale à $\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

4) On admet que l'aire du triangle $\text{OM}_k\text{M}_{k+1}$ est égale à $a_k = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$

   et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $\mathscr{A}_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$.

   L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

   Variables : $\mathscr{A}$: réel, k, n : entiers
   Entrées et initialisation
   | Lire la valeur de n
   | $\mathscr{A}$ prend la valeur 0
   Traitement
   | **pour** k allant de 0 à $n-1$ **faire**
   | | $\mathscr{A}$ prend la valeur $\mathscr{A} + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$
   | **fin**
   Sorties : Afficher $\mathscr{A}$

   On entre dans l'algorithme $n = 10$

   Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathscr{A}$	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726		

5) On admet que $\mathscr{A}_2 = 0$ et que la suite $(\mathscr{A}_n)$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n = \dfrac{7\pi}{3} \approx 7,3$.

   Recopier et compléter l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $\mathscr{A}_n \geqslant 7,2$. On ne demande pas de déterminer n.

   Variables : $\mathscr{A}$: réel, k, n : entiers
   Entrées et initialisation
   | n prend la valeur 2
   | $\mathscr{A}$ prend la valeur 0
   Traitement
   | **tant que** . . . . . . **faire**
   | | n prend la valeur $n+1$
   | | $\mathscr{A}$ prend la valeur 0
   | | **pour** k allant de 0 à $n-1$ **faire**
   | | | $\mathscr{A}$ prend la valeur $\mathscr{A} + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$
   | | **fin**
   | **fin**
   Sorties : Afficher . . . . . .