Révision : Suite et fonction ln

EXERCICE 1

Amérique du Nord 2019

Partie A : établir une inégalité

Sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2) En déduire que pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[,\quad \ln(x+1) \leqslant x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n)$.

On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2.
2) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \geqslant 0$.
   b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \leqslant 1$.
   c) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3) On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que $\ell = f(\ell)$, où f est la fonction définie dans la **partie A**. En déduire la valeur de ℓ.
4) a) Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p}.
   b) Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15}.

EXERCICE 2

Liban 2019

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

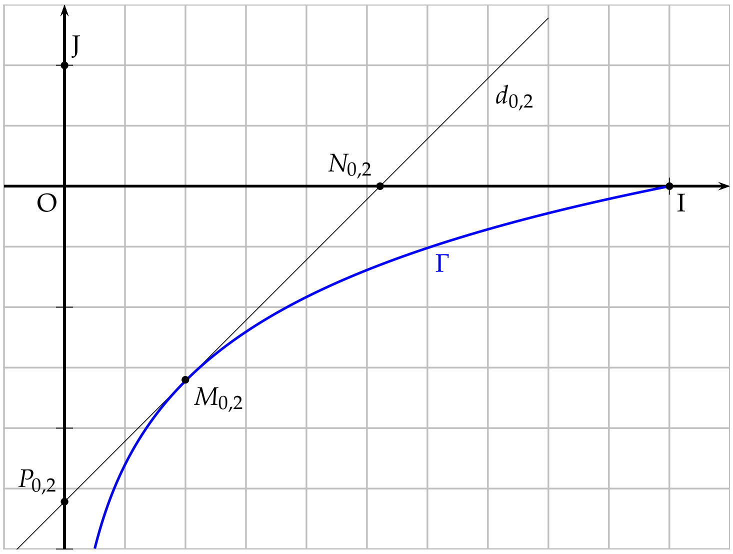
1) On considère la fonction f définie sur $]0\,;1]$ par : $f(x) = x(1-\ln x)^2$.
   a) Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;1]$.
   On admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle.

On note Γ la courbe de la fonction g définie sur $]0\,;1]$ par $g(x) = \ln x$.

Soit a un réel de l'intervalle $]0\,;1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a .

On s'intéresse à l'aire du triangle ON_aP_a quand a varie dans l'intervalle $]0\,;1]$.

2) On étudie le cas particulier où $a = 0,2$ et on donne la figure ci-dessous.



a) Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

b) Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

c) Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$.
Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0\,;1]$, l'aire du triangle ON_aP_a en unités d'aire est donnée par $\mathscr{A}(a) = \dfrac{1}{2}a(1 - \ln a)^2$.

3) À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathscr{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

EXERCICE 3

Liban mai 2018

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\dfrac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\dfrac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\dfrac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n^{e} partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = \dfrac{1}{4}$.

1) Montrer que $p_2 = \dfrac{7}{16}$.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2}$.

3) On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	0,25	0,437 5	0,390 6	0,402 3	0,399 4	0,400 1	0,399 9

Quelle conjecture peut-on émettre ?

4) On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{20}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c) La suite (p_n) converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.