Révision : Complexes

EXERCICE 1

Amérique du Nord 2019

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
Dans ce qui suit, z désigne un nombre complexe.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : L'équation $z - i = i(z+1)$ a pour solution $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Affirmation 2 : Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, le nombre complexe $1 + e^{2ix}$ admet pour forme exponentielle $2\cos x\, e^{-ix}$.

Affirmation 3 : Un point M d'affixe z tel que $|z-i| = |z+1|$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.

Affirmation 4 : L'équation $z^5 + z - i + 1 = 0$ admet une solution réelle.

EXERCICE 2

Liban 2019

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm.

On appelle f la fonction qui, à tout point M, distinct du point O et d'affixe un nombre complexe z, associe le point M′ d'affixe z' tel que

$$z' = -\frac{1}{z}.$$

1) On considère les points A et B d'affixes $z_{\mathrm{A}} = -1 + i$ et $z_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.

   a) Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A′ image du point A par la fonction f.

   b) Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B′ image du point B par la fonction f.

   c) Sur la copie, placer les points A, B, A′ et B′ dans le repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$. Pour les points B et B′, on laissera les traits de construction apparents.

2) Soit r un réel strictement positif et θ un réel. On considère le complexe z défini par $z = r\,e^{i\theta}$.

   a) Montrer que $z' = \frac{1}{r}\,e^{i(\pi-\theta)}$.

b) Est-il vrai que si un point M, distinct de 0, appartient au disque de centre 0 et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre 0 et de rayon 1, alors son image M′ par la fonction f est à l'extérieur de ce disque ? Justifier.

3) Soit le cercle Γ de centre K d'affixe $z_K = -\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

a) Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2 + x + y^2 = 0$.

b) Soit $z = x + iy$ avec x et y non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y.

c) Soit M un point, distinct de O, du cercle Γ. Montrer que l'image M′ du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.

EXERCICE 3

Vrai-Faux

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(4z^2 - 20z + 37\right)\left(2z - 7 + 2\mathrm{i}\right) = 0$.

« Les solutions de l'équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2. »