Révision : Probabilités et suites

EXERCICE 4

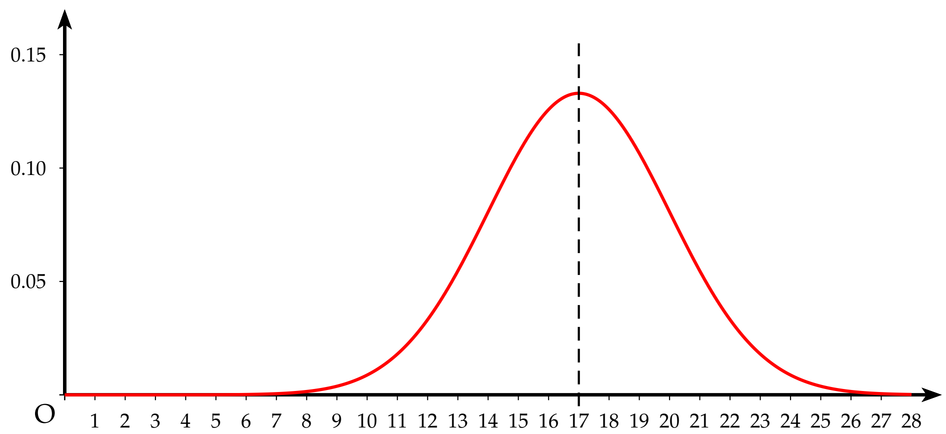
Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B.

Partie A

Les durées des parties de type A et de type B, exprimées en minutes, peuvent être modélisées respectivement par deux variables aléatoires X_A et X_B.

La variable aléatoire X_A suit la loi uniforme sur l'intervalle $[9 ; 25]$

La variable aléatoire X_B suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type 3. La représentation graphique de la fonction de densité de cette loi normale et son axe de symétrie sont donnés ci-dessous.



1) a) Calculer la durée moyenne d'une partie de type A.

   b) Préciser à l'aide du graphique la durée moyenne d'une partie de type B.

2) On choisit au hasard, de manière équiprobable, un type de jeu. Quelle est la probabilité que la durée d'une partie soit inférieure à 20 minutes ? On donner le résultat arrondi au centième.

Partie B

On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

- si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8 ;
- si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour une entier naturel $n \geqslant 1$, on note A_n et B_n les évènements :

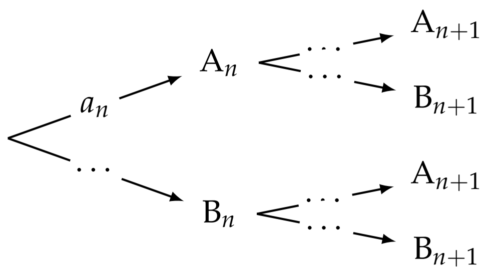
A_n : « la n-ième partie est une partie de type A. »

B_n : « la n-ième partie est une partie de type B. »

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n.

1) a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci contre

   b) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$



Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$. La suite (a_n) est donc définie par : $a_1 = a$, et pour $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

2) *Étude d'un cas particulier.* Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.
   a) Montrer par récurrence, que pour $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$.
   b) Montrer que la suite (a_n) est croissante.
   c) Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

3) *Étude du cas général.* Dans cette question, $a \in [0\,;\,1]$.
   On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = a_n - 0,6$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
   b) En déduire l'expression de u_n puis de a_n en fonction de a et de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (a_n).
   Cette limite dépend-elle de la valeur de a ?
   d) La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre insérée en début des parties de type B. Quelle devrait-être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?

EXERCICE 5

Deux groupes de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.

Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

Le groupe de spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de grenouilles autour de l'étang. Ce taux dépend notamment du nombre de grenouilles présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.
Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à $0,9$; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.
On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite (T_n) qui, à tout entier naturel n, associe le taux de disponibilité des ressources n années après 2018. On a ainsi $T_0 = 0,9$.
Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} = T_n - 0,1T_n^2$.

1) Certains spécialistes en environnement estiment qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de $0,4$. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?
2) On définit la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x) = x - 0,1x^2$.
   Ainsi, la suite (T_n) vérifie pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = f(T_n)$.
   a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.
   b) Montrer que pour tout n entier naturel, on a : $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n \leqslant 1$.
   c) La suite (T_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
   d) Le groupe de spécialistes en environnement affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à $0,4$ au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois.
   Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution

Le groupe de biologistes a choisi une autre option et travaille sur le nombre de grenouilles peuplant l'étang. Au 1er janvier 2018, il avait été dénombré 250 grenouilles.
Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$P(t) = \frac{1\,000}{0,4 + 3,6e^{-0,5t}}$$

où t est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1er janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).

1) Calculer $P'(t)$ où P' est la fonction dérivée de P puis étudier le signe de $P'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2) Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3) Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0\,;+\infty[$ telle que $P(t_0) = 2\,000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.
4) Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2 000 grenouilles.