Révision : Fonction exponentielle et logarithme

EXERCICE 1

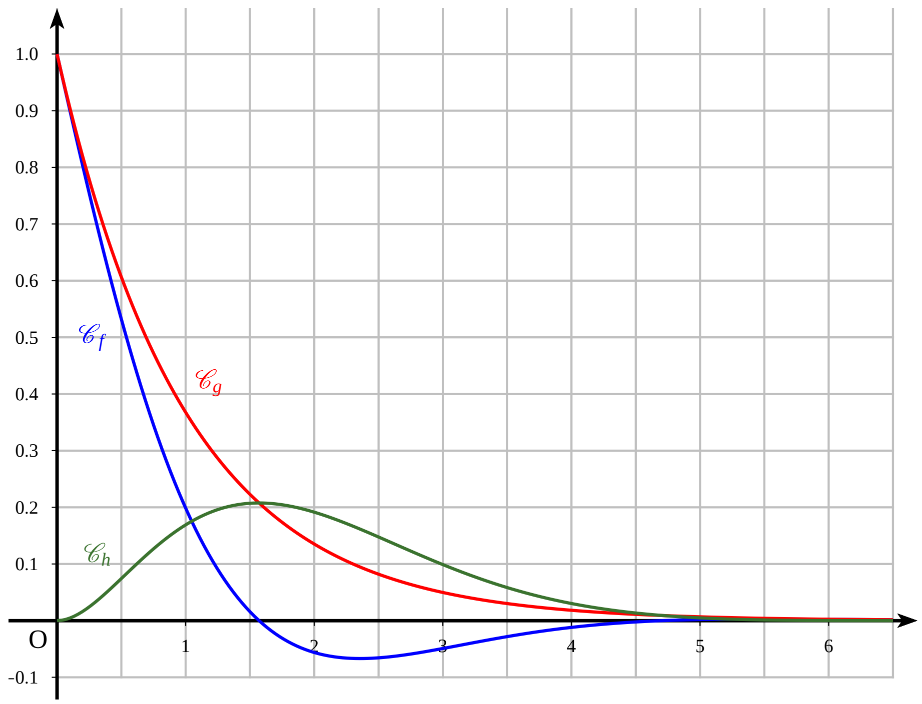
Polynésie septembre 2015

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x}\cos x \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$

On définit la fonction h sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.

Les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données, ci-après, dans un repère orthogonal.



1) Conjecturer :
   a) les limites des fonctions f et g en $+\infty$;
   b) la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$;
   c) la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximal.
2) Justifier que $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
3) Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4) a) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

   Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $h'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1\right]$.

   b) Justifier que, sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$

   et que, sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$, on a $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$.

   c) En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$.

5) On admet que, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, la fonction H définie par

$$H(x)=\frac{1}{2}e^{-x}\left[-2+\cos x-\sin x\right]$$

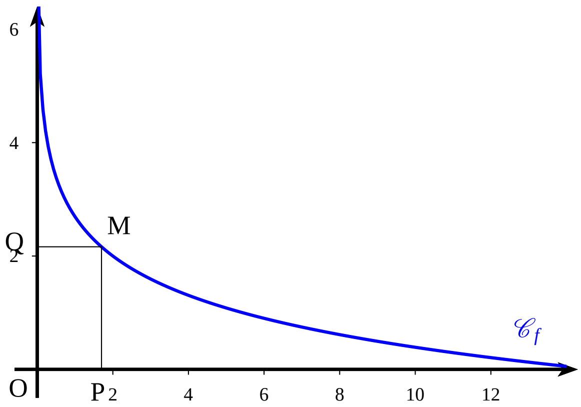
est une primitive de la fonction h.
On note $\mathcal{D}$ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et les droites d'équations $x=0$ et $x=2\pi$.
Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.

Exercice 2

Pondichéry avril 2016

Soit f la fonction définie sur $]0\,;14]$ par : $f(x)=2-\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante pour toute position du point M sur $\mathscr{C}_f$?
- L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ?
  Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.

Exercice 3

Amérique du Nord juin 2015

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $u(x)=\ln x+x-3$.

1) Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2) Démontrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3) En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)+2$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2) a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln x$.

1) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x) - \ln x = \dfrac{2 - \ln x}{x}$.
En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

2) On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $H(x) = \dfrac{1}{2}\ln^2 x$
est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
Calculer $I = \displaystyle\int_1^{e^2} \dfrac{2 - \ln x}{x}\,dx$. Interpréter graphiquement ce résultat.

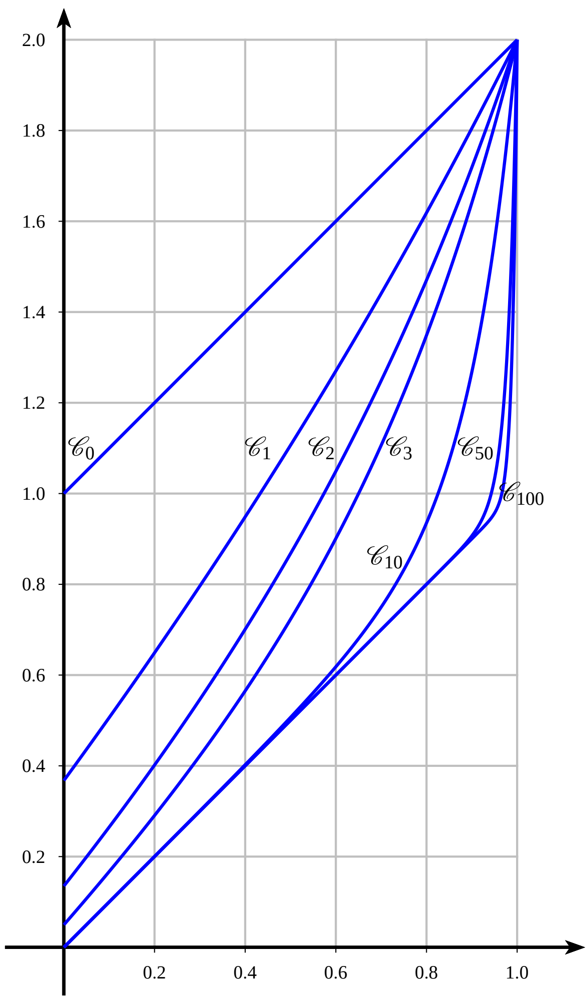
Exercice 4

Asie juin 2015

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f_n(x) = x + e^{n(x-1)}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Quelques-unes des courbes $\mathscr{C}_n$ sont représentées ci-contre.



Partie A : généralités sur les fonctions f_n

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[0\,;1]$.

2) Montrer que les courbes $\mathscr{C}_n$ ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.

3) À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathscr{C}_n$ pour les grandes valeurs de n ?
Démontrer cette conjecture.

Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0\,;\,1]$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = f_n(x)$.

1) Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).
2) Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant x < 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie C : aire sous les courbes C_n

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. À partir des représentations graphiques, conjecturer la limite de la suite (A_n) lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, puis démontrer cette conjecture.

Exercice 5

N$^{\text{lle}}$ Calédonie novembre 2015

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a$.

1) Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.
2) Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?