Révision : fonction logarithme
Nombres complexes

EXERCICE 1

Amérique du Nord 2 juin 2015 **(6 points)**

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = \ln x + x - 3$.

1) Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3) En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2) a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$, où u est la fonction définie dans la partie A.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln x$.

1) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x) - \ln x = \dfrac{2 - \ln x}{x}$.
   En déduire que les courbes $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
2) On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $H(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
   Calculer $I = \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$. Interpréter graphiquement ce résultat.

EXERCICE 2

Amérique du Nord 2 juin 2015 **(5 points)**

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n\,;\,y_n)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \quad \begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

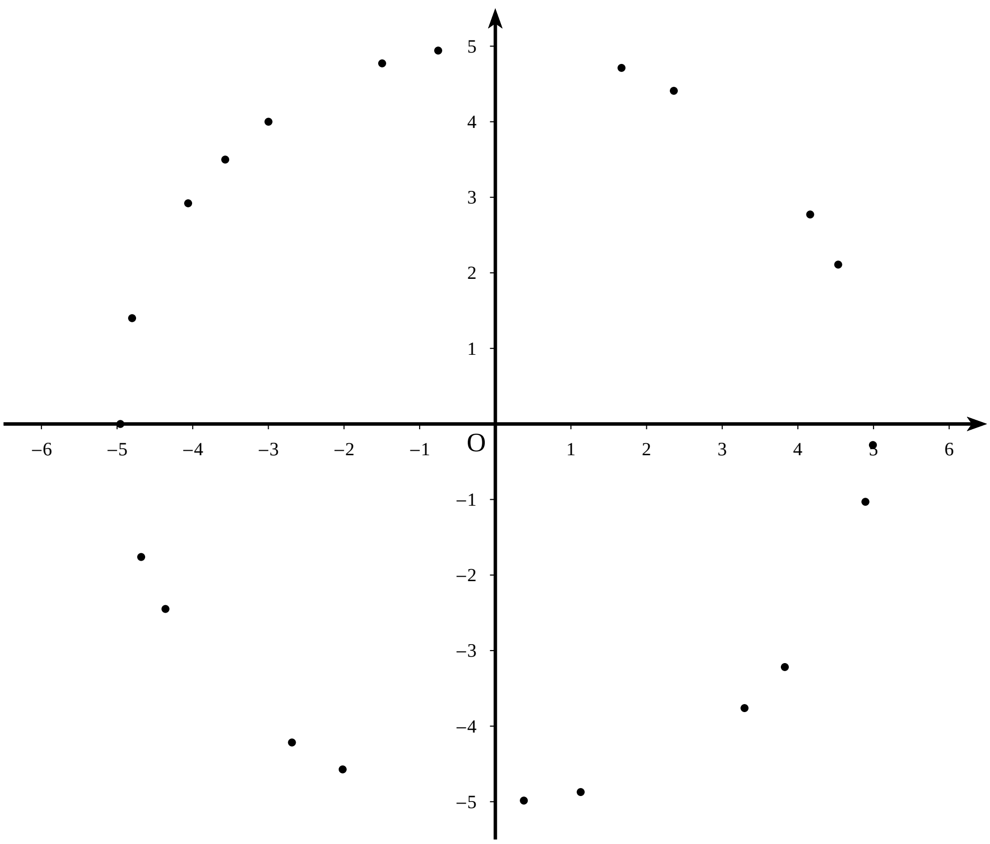
1) a) Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2.

b) Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

Variables : i, x, y, t : nombres réels
Entrées et initialisation
    x prend la valeur -3
    y prend la valeur 4
Traitement et sorties
    pour i allant de 0 à 20 **faire**
        Construire le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$
        t prend la valeur x
        x prend la valeur ......
        y prend la valeur ......
    fin

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.

c) À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points A_0, A_1 et A_2. On les nommera sur la figure, (à rendre avec la copie).

Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2) Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.

Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + iy_n$ l'affixe du point A_n.

a) Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$.
Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

b) On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos\theta = 0,8$ et $\sin\theta = 0,6$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$

c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = e^{in\theta} z_0$.

d) Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.

e) Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n.
Représenter θ sur la figure jointe en annexe 2, (à rendre avec la copie).
Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.