Révision : Fonctions et intégration

EXERCICE 1

Liban mai 2016

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1-x}}$.

Partie A

1) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.

2) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+e}$.

3) Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\ln 2+1-\ln(1+e)$.

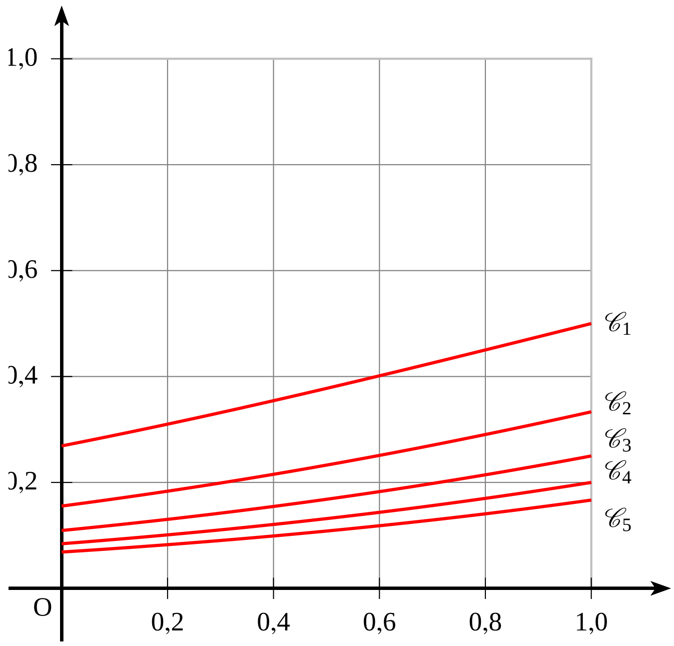
Partie B

Soit $n\in\mathbb{N}$. On considère les fonctions f_n définies sur $[0\,;1]$ par : $f_n(x)=\dfrac{1}{1+ne^{1-x}}$.

Soit $\mathscr{C}_n$ la courbe de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère la suite de terme général : $u_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1) On a tracé ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la fonction f_0.



2) Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0.

3) Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer cette conjecture.

4) La suite (u_n) admet-elle une limite ?

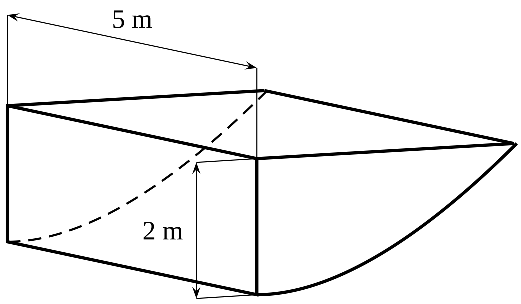
Exercice 2

Amérique du Nord juin 2016

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.

Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

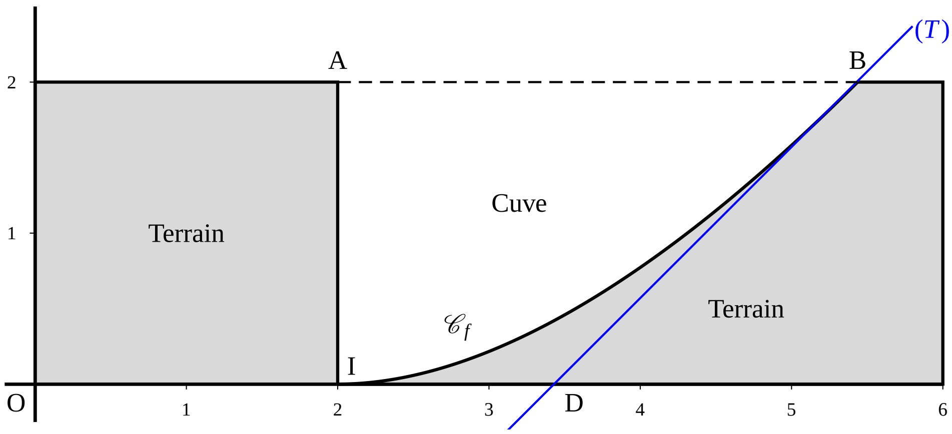


Cette cuve est schématisée ci-contre.

La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,2e]$ définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 1 m et constitue une vue de profil de la cuve.
On considère les points A(2 ; 2), I(2 ; 0) et B(2e ; 2).



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1) Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.
2) On note (T) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite (T) avec l'axe des abscisses.
   a) Déterminer une équation de la droite (T) et en déduire les coordonnées de D.
   b) On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites d'équations $y = 2$, $x = 2$ et $x = 2e$.
   S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB.
   Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

3) a) Montrer que, sur l'intervalle $[2\,;2e]$, la fonction G définie par :

$$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$$

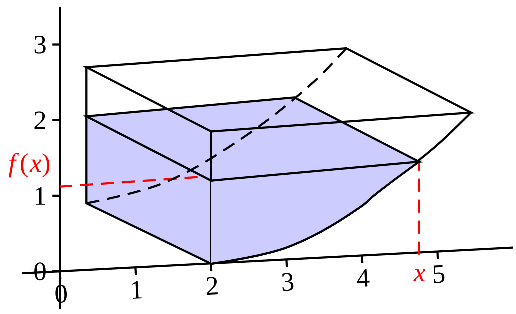
est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;2e]$.

c) Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et $2e$, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.



On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;2e]$,

$$v(x) = 5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right].$$

1) Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?

2) On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre.

Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

Variables : a, b réels
Entrées et initialisation
  a prend la valeur 2
  b prend la valeur $2e$
Traitement
  tant que $v(b) - v(a) > 10^{-3}$ **faire**
    c prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
    si $v(c) < \frac{V}{2}$ **alors**
      a prend la valeur c
    sinon
      b prend la valeur c
    fin
  fin
Sorties : Afficher $f(c)$