Exercices.
La fonction logarithme népérien

Exercice I

Simplifications

Simplifer les écritures suivantes :

1) $A = e^{\ln 3}$; $B = \dfrac{e^{3+\ln 8}}{e^{2+\ln 4}}$; $C = \dfrac{e^{\ln 8}}{e^{3\ln 2}}$

2) $f(x) = e^{\ln(x-1)+\ln x}$; $g(x) = \ln e^{\frac{1}{x}} + e^{-\ln x}$

Exercice II

Ensemble de définition

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1) $\ln(x^2)$; $\ln(1-x)$; $\ln(x-3)$; $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$; $\dfrac{1}{\ln x}$

2) $\ln(x^2+4x)$; $\ln|x^2-3x+2|$; $\ln|x+1| - \ln|x-1|$; $\ln\left(\dfrac{x-3}{2-x}\right)$

3) $\ln(e^x-1)$; $e^x + \ln|x|$; $\ln e^x - e^{\ln(x+1)}$; $e^{\ln(x^2-1)}$

Exercice III

Équations : Résoudre les équations suivantes :

1) $\ln(2-2x) = 1$
2) $\ln(2-x) = -3$
3) $\ln(x^2-8) = 0$
4) $\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 2$
5) $e^{x+2} = 3$
6) $e^{\frac{x}{x+1}} = 2$
7) $(e^x+1)(e^x-4) = 0$
8) $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$
9) $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$
10) $\ln(x-2) = \ln 2$
11) $\ln(x-2) = \ln(x^2-2)$

Exercice IV

Inéquations : Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln x < 1$
2) $\ln x \geqslant 2$
3) $-1 \leqslant \ln x \leqslant 2$
4) $\ln(2x-1) > -1$
5) $e^{x-1} < 2$
6) $e^{\frac{x+1}{x}} > 3$
7) $\dfrac{1}{2} \leqslant e^x \leqslant 2$

8) $(e^x+1)(e^x-4)\leqslant 0$

9) $\ln(x-2)\leqslant\ln(2x-1)$

10) $\ln(-3x)\geqslant\ln(x^2-4)$

11) $\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\geqslant\ln x$

12) $\ln x\leqslant\ln(x^2-2x)$

Exercice V

Logarithme du produit

1) Simplifier : $a=\ln 3+\ln\dfrac{1}{3}$; $b=\ln\dfrac{1}{16}$; $c=\dfrac{1}{2}\ln\sqrt{2}$

2) Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$

$a=\ln 50$; $b=\ln\dfrac{16}{25}$; $c=\ln 250$

3) Démontrer que : $\ln(2+\sqrt{3})+\ln(2-\sqrt{3})=0$

4) Préciser l'ensemble des réels x pour lesquels l'égalité est vraie.

$\ln(x^2-x)=\ln x+\ln(x-1)$; $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)=\ln(x-1)-\ln(x+2)$

5) Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue n entier naturel

a) $2^n\leqslant 100$

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\leqslant 10^{-2}$

c) $0,2\geqslant\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

d) $\left(1+\dfrac{3}{100}\right)^n\geqslant 2$

Exercice VI

Équations plus difficiles : Résoudre les équations suivantes :

1) $2\ln x=\ln(x+4)+\ln 2x$

2) $\ln(x+3)(x+2)=\ln(x+11)$

3) $\ln\sqrt{3x-1}+\ln\sqrt{x-1}=\ln(x-2)$

4) $\ln|x+2|+\ln|x-2|=0$

5) $\ln|x-2|+\ln(x+4)=3\ln 2$

6) $\ln|2x+3|+\ln|x-1|=2\ln|x|$

7) $\ln^2 x-2\ln x-3=0$

8) $e^{3x}=4e^x$

9) $e^{2x}-5e^x+4=0$

10) $e^{-2x}-5e^{-x}+6=0$

11) $\begin{cases}x^2+y^2=10\\ \ln x+\ln y=\ln 3\end{cases}$

12) $\begin{cases}x+y=1\\ 3e^x-e^{y+3}-2e^2=0\end{cases}$

13) $\begin{cases}2\ln x+\ln y=7\\ 3\ln x-5\ln y=4\end{cases}$

14) $\begin{cases}\ln x\ln y=-12\\ \ln xy=1\end{cases}$

15) $\begin{cases}e^x-\dfrac{1}{e}e^y=1\\ 2e^x+e^y=4+e\end{cases}$

Exercice VII

Inéquations plus difficiles : Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln(5-x) - \ln 3 + \ln(x-1) \geqslant 0$
2) $\ln(3x^2 - x) \leqslant \ln x + \ln 2$
3) $\ln(3x^2 - x - 2) \geqslant \ln(6x+4)$
4) $3\ln x > \ln(3x-2)$
5) $e^{2x} < 2e^x$
6) $e^{x+\ln 4} > \dfrac{2}{3}$
7) $e^{x+2} \geqslant \dfrac{3}{e^x}$
8) $\ln^2 x - 2\ln x - 3 \geqslant 0$
9) $\ln^2 |x| - \ln x^2 - 3 > 0$
10) $3e^{2x} - 7e^x + 2 < 0$

Exercice VIII

Inéquation du 3ᵉ degré

Pour tout réel x, on pose : $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

1) a) Vérifier que $P(-1) = 0$
   b) En déduire une factorisation de $P(x)$
   c) Résoudre alors l'inéquation : $P(x) \leqslant 0$

2) Utiliser les résultats précédents pour résoudre l'inéquation :

$$2\ln x + \ln(2x+5) \leqslant \ln(2-x)$$

Exercice IX

Limites

Déterminer les limites au point considéré :

1) $f(x) = x - \ln x$ en $+\infty$
2) $f(x) = x + 1 + \dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$
3) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$ en 0
4) $f(x) = x + x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$
5) $f(x) = \ln(e^x + 2)$ en $-\infty$ et $+\infty$
6) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{2e^x + 3}\right)$ en $-\infty$ et $+\infty$

Exercice X

Dérivées

Pour les fonctions suivantes calculer la fonction dérivée

1. $f(x) = \ln(1 + x^2)$
2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
3. $f(x) = \ln(\ln x)$
4. $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$
5. $f(x) = e^{-x}\ln x$
6. $f(x) = e^{x\ln x}$
7. $f(x) = \ln(1 + e^x)$
8. $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

Exercice XI

Études de fonctions

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

a) Démontrer que f est strictement croissante.

b) Démontrer que la droite d d'équation $y = x - 4$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. Priciser les positions relatives.

c) Tracer d et $\mathscr{C}_f$.

2) Soit la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

a) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

b) Démontrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. On précisera les positions relatives.

c) Tracer d et $\mathscr{C}_f$.

3) f est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

a) Démontrer que f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

b) Visualiser la courbe $\mathscr{C}_f$ sur votre calculatrice. La courbe admet-elle une asymptote ?

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $]1; +\infty[$. Trouver un encadrement de α à 10^{-1}.

Exercice XII

Exercice BAC 1

f est la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$$

$\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) a) Pourquoi la droite d d'équation $y = x$ est-elle asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$?

b) On note h la fonction définie sur I par $h(x) = x + \ln x$.
Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ a sur I une solution unique α telle que :
$0,5 < \alpha < 0,6$.

c) En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et d.

2) a) Démontrer qe pour tout réel x de I, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ où g est une fonction définie sur I que l'on précisera.

b) Démontrer que pour tout x de I, on a $g(x) \geqslant 1$.

c) En déduire les variations de f et tracer $\mathscr{C}_f$.

Exercice XIII

Exercice BAC 2

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

et $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

2) a) On note A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1.
Trouver une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en A.

   b) Construire T, puis $\mathscr{C}_f$.

3) M est un point de $\mathscr{C}_f$.
Démontrer que la tangente T_u à la courbe $\mathscr{C}_f$ en M est parallèle à la droite d'équation $y = x$ si, et seulement si :

$$u^3 - 1 + 2\ln u = 0 \quad [1]$$

4) À partir de l'équation [1], démontrer que A est le seul point de $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Exercice XIV

Exercice BAC 3

A : Étude d'une fonction auxiliaire

g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(1+x^2)$$

1) Démontrer que sur l'intervalle $[1; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et doner pour α un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

2) Préciser le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

B : Étude d'une fonction

f est la fonction d"éfinie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) a) Quelle est la limite de $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ quand x tend vers 0 ?

b) En déduire que f est dérivable en $x = 0$ et trouver une équation de la tangente T en $x = 0$ à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2) a) Vérifier que pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

b) En déduire la limite en $+\infty$.

3) a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b) En déduire les variations de f.

c) Contruire T , puis $\mathscr{C}_f$.

Exercice XV

Exercice BAC 4

f est la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x) = x(\ln^2 x + 1) \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et } f(0) = 0$$

$\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) a) Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^2 x = 0$.

b) La fonction f est-elle dérivable en zéro ?

c) Pourquoi $\mathscr{C}_f$ admet-elle une tangente verticale au point d'abscisse 0 ?

2) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;1]$.

3) On note A le point de coordonnées $(0;1)$.

a) Démontrer que la tangente en A à $\mathscr{C}_f$ passe par O.

b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de la droite (OA).

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exercice XVI

Exercice BAC 5 : avec des suites

(u_n) est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$$

On note (v_n) la suite définie pour tout n par :

$$v_n = \ln u_n - 2$$

1) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser v_0 et sa raison r.

2) En déduire v_n, puis $\ln u_n$, en fonction de n.

3) a) Quelle est la limte de la suite (v_n) ?

b) En déduire que la suite (u_n) converge vers e^2.