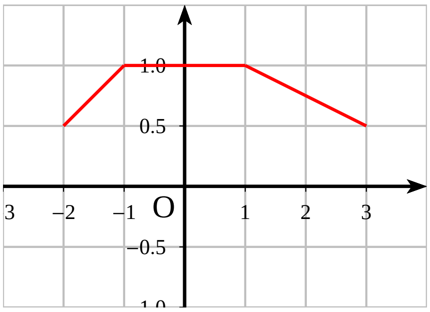
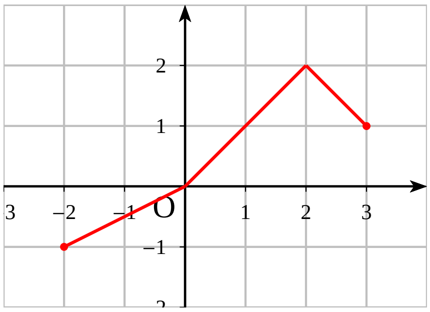
Exercices
Intégration et primitives

Exercice 1

Notion d'intégrale

1) Pour chaque fonction affine par morceaux f, représentée ci-dessous, calculer, en utilisant les aires, l'intégrale $I(f)$ sur l'intervalle de définition de f.

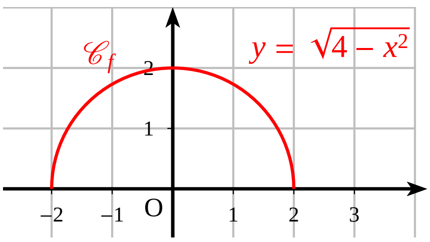


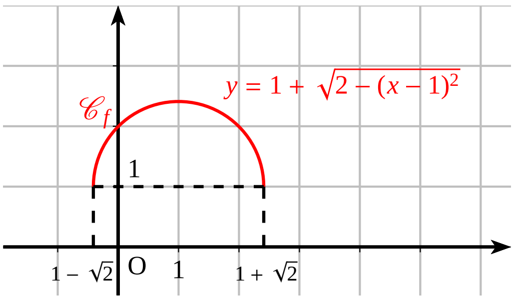


2) Dans chaque cas, la fonction f est représentée par sa courbe $\mathscr{C}_f$, dont une équation est indiquée.

a) Prouver que $\mathscr{C}_f$ est un demi-cercle. Préciser son centre et son rayon.

b) En déduire l'intégrale de f sur son intervalle de définition.





3) Les fonctions affines par morceaux f et g sont définies sur l'intervalle $[-1\,;5]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -x+1 & \text{si } 0 < x \leqslant 3 \\ x-5 & \text{si } 3 < x \leqslant 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4} & \text{si } 1 < x \leqslant 5 \end{cases}$$

a) Calculer les intégrales sur $[-1\,;5]$ de f et g.

b) En déduire les intégrales sur $[-1\,;5]$ des fonction $f+4g$ et $5f-2g$

Exercice 2

Encadrement et valeur moyenne

1) Comparer, sans les calculer les réels I et J.

   a) $I = \displaystyle\int_1^2 x\,e^x\,dx$ b) $J = \displaystyle\int_1^2 x^2\,e^x\,dx$

2) Démontrer les encadrements suivants :

   a) $\dfrac{9}{4} \leqslant \displaystyle\int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,dt \leqslant 9$ c) $\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt \leqslant 1$

   b) $\sqrt{2} \leqslant \displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \leqslant 3$ d) $2e^{-4} \leqslant \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}}\,dx \leqslant 2$

   e) $2\ln 3 \leqslant \displaystyle\int_2^4 \ln(x^2-1)\,dx \leqslant 2\ln 3 + 2\ln 5$

3) La suite (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 (1+t^n)\,dt$$

   a) Prouver que la suite (I_n) est décroissante.

   b) Est-elle convergente ?

4) Calculer la valeur moyenne μ sur l'intevalle $[-1;1]$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

5) Dans chacun des cas suivants, μ désigne la valeur moyenne d'une fonction continue f sur un intervalle I. Calculer l'intégrale indiquée :

   a) $\mu = 2\,;\ I = [1;4]\,;\ \displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx$ b) $\mu = \ln 2\,;\ I = [1;3]\,;\ \displaystyle\int_3^1 f(x)\,dx$

   c) $\mu = \dfrac{2}{\pi}\,;\ I = \left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right];\ f$ paire ; $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$

6) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$

   a) Démontrer que $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$

   b) La suite (I_n) est-elle convergente ?

7) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

   La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \displaystyle\int_0^n f(t)\,dt$

   a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   b) Prouver que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \dfrac{n-1}{2}$. La suite (u_n) converge t-elle ?

Exercice 3

Primitive

1) Prouver dans les cas suivantes que la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I.

   a) $f(x) = \tan^2 x\,;\ F(x) = \tan x - x\,;\ I = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

   b) $f(x) = \dfrac{2(x^4-1}{x^3}\,;\ F(x) = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2\,;\ I =]0;+\infty[$

   c) $f(x) = \cos x - x\sin x\,;\ F(x) = x\cos x\,;\ I = \mathbb{R}$

   d) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}\,;\ F(x) = x - \ln(1+e^x)\,;\ I = \mathbb{R}$

   e) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}\,;\ F(x) = \ln(\ln x)\,;\ I =]1;+\infty[$

2) Montrer que les fonction F et G sont deux primitives de la même fonction f sur un intervalle I.

$$F(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1}\,;\quad G(x) = \frac{x^2+7x-5}{x-1}\,;\quad I =]1;+\infty[.$$

Exercice 4

Calcul de primitive

Pour les exercices suivants, donner une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

Linéarité de la primitive

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 3,\quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{3},\quad I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^3},\quad I =]0;+\infty[$

4) $f(x) = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 1,\quad I =$

5) $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x} - 1,\quad I = \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

Forme u′uⁿ

6) $f(x) = (x+2)^3,\quad I = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \dfrac{(x-1)^5}{3},\quad I = \mathbb{R}$

8) $f(x) = 2(3x-1)^5,\quad I = \mathbb{R}$

9) $f(x) = 2x(1+x^2)^5,\quad I = \mathbb{R}$

10) $f(x) = \sin x\cos x,\quad I = \mathbb{R}$

Forme $\dfrac{\mathbf{u}'}{\mathbf{u}}$

11) $f(x) = \dfrac{1}{x-4},\quad I =]4;+\infty[$

12) $f(x) = \dfrac{1}{x-4},\quad I =]-\infty;4[$

13) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x},\quad I =]0;1[$

Forme $\dfrac{\mathbf{u}'}{\mathbf{u}^n}$, $\mathbf{n \geqslant 2}$

14) $f(x) = \dfrac{2}{(x+4)^3},\quad I =]-4;+\infty[$

15) $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2},\quad I = \left]-\infty;\dfrac{1}{3}\right[$

16) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2-x+3)^2},\quad I = \mathbb{R}$

17) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$, $I =]-1;3[$

18) $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3+8)^3}$, $I =]-2;+\infty[$

Forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$

19) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}$, $I = \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

20) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$, $I =]1;+\infty[$

Forme $u'e^u$

21) $f(x) = e^{-x+1}$, $I = \mathbb{R}$

22) $f(x) = 2e^{3x-2}$, $I = \mathbb{R}$

23) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $I = \mathbb{R}$

24) $f(x) = \sin x \times e^{\cos x}$, $I = \mathbb{R}$

Forme $u(ax+b)$

25) $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x)$, $I = \mathbb{R}$

26) $f(x) = 3\cos x - 2\sin(2x) + 1$, $I = \mathbb{R}$

27) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 5

Primitive et condition initiale

Pour les exercices suivants , trouver la primitive F, de la fonction f, qui vérifie la condition donnée sur un intervalle I à préciser.

1) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4x + 1$, $F(2) = 0$

2) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + x$, $F(1) = 0$

3) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$, $F(0) = 0$

4) $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

5) $f(x) = \cos x \sin^2 x$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

6) $f(x) = 2\cos\dfrac{x}{2} - 3\sin\dfrac{x}{2}$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

7) $f(x) = \dfrac{2}{(2x+1)^2}$, $F(-1) = 0$

8) $f(x) = -\dfrac{1}{3-x}$, $F(1) = 1$

9) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$, $F(0) = 0$

10) $f(x) = e^{3x+1}$, $F(-1) = 0$

11) $f(x) = xe^{-x^2}$, $F(\sqrt{\ln 2}) = 1$

12) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$, $F(2) = 0$

Exercice 6

Calcul d'intégrales

Pour les exercices suivantes, calculer les intégrales indiquées à l'aide d'une primitive.

1) $I = \displaystyle\int_0^4 (x-3)\,dx$

2) $I = \displaystyle\int_2^{-1} (t^2 - 4t + 3)\,dt$

3) $I = \displaystyle\int_1^2 \left(t^2 + t - \frac{1}{t}\right) dt$

4) $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx$

5) $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\,dx$

6) $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2}$

7) $I = \displaystyle\int_0^4 dx$

8) $I = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x}\,dx$

9) $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2-4}\,dx$

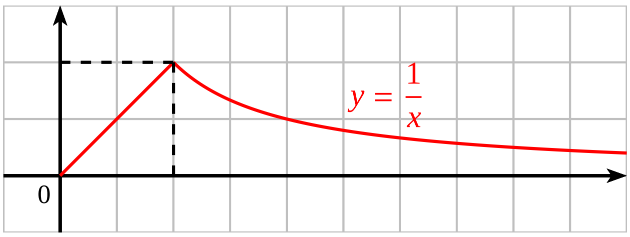
10) $I = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$ 11) $I = \displaystyle\int_{0}^{1} 5e^{3x}\,\mathrm{d}x$ 12) $I = \displaystyle\int_{0}^{1} te^{t^2-1}\,\mathrm{d}t$

Exercice 7

Calcul d'aire

La fonction f est représentée par la courbe ci-dessous. Utiliser la relation de Chasles pour calculer les intégrales :

$$I = \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_2^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$



Exercice 8

Calcul d'intégrale par une décomposition

1) a) Trouver les réel a et b tels que, pour tout réels x de $\mathbb{R} - \{-3; 3\}$, on a :

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$$

b) En déduire : $I = \displaystyle\int_4^5 \frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$

2) a) Trouver trois réel a, b et c tels que pour tout réel de $\mathbb{R} - \{-3\}$, on a :

$$\frac{4x^2-5x+1}{x+3} = ax + b + \frac{c}{x+3}$$

b) En déduire : $I = \displaystyle\int_2^0 \frac{4x^2-5x+1}{x+3}\,\mathrm{d}x$

3) a) Prouver que pour tout réel x :

$$\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$$

b) En déduire : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 9

Calcul de primitives

Calculer une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiquée.

1) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-1}$ $I =]-\infty; 1[$

2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $I =]-\pi; 0]$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}$ $I =]0; +\infty[$

4) $f(x) = \sin x \cos x$ $I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2}$ $I =]0; +\infty[$

6) $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$ $I =]0; +\infty[$

7) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $I =]0; +infty[$

8) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ $I =]1; +\infty[$

9) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $I = \mathbb{R}$

Exercice 10

Primitive d'une fonction rationnelle par décomposition

f désigne une fonction rationnelle définie sur un intervalle I. Déterminer une primitive de f à l'aide de la décompostion proposée

1) $f(x) = \dfrac{4x+5}{2x+1}$ $I =]1; +\infty[$. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a + \dfrac{b}{2x+1}$

2) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-4}{x-2}$ $I =]2; +\infty[$. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x+3}$

a) $I =]3; +\infty[$ b) $I =]-3; 3[$ c) $I =]-\infty; -3[$

4) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$ $I =]1; +\infty[$. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$

Exercice 11

Intégration par partie

Calculer les intégales suivantes à l'aide d'une intégration par partie.

1) $I = \displaystyle\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x$

2) $I = \displaystyle\int_1^{e^2} \ln t\,\mathrm{d}t$

3) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} (x-1)\cos x\,\mathrm{d}x$

4) $I = \displaystyle\int_0^1 (x+2)e^x\,\mathrm{d}x$

5) $I = \displaystyle\int_1^2 (t-2)e^{2t}\,\mathrm{d}t$

6) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 12

Primitive par intégration par partie

Trouver la prmitive F, nulle en a, des fonction f suivantes déterminées sur I

1) $f(t) = \ln(t^2) \quad I =]0; +\infty[\quad a = 1$
2) $f(t) = (2t + 1)\sin t \quad I = \mathbb{R} \quad a = 0$
3) $f(t) = (t + 1)^2 e^{2t} \quad I = \mathbb{R} \quad a = -1$ (on fera deux intégrations par partie).
4) $f(t) = (\ln t)^2 \quad I =]0; +\infty[\quad a = 1$ (on fera deux intégrations par partie).
5) $f(t) = e^{-2t}\cos t \quad I = \mathbb{R} \quad a = 0$ (on fera deux intégrations par partie).

Exercice 13

Asie juin 2005

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.

On définit, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{n!}(2 - x)^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

1) Calculer I_1.
2) Établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{2^n}{n!}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$.
3) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1,\ I_{n+1} = I_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
4) Démontrer par récurrence que $\mathrm{e}^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \cdots + \dfrac{2^n}{n!} + I_n$.
5) On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.
   a) Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}u_n$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$.
6) En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).
7) Justifier enfin que :
$$\mathrm{e}^2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right).$$
8) Cette égalité permet de trouver une valeur approchée de e^2.
   Ecrire deux algorithmes avec votre calculatrice qui permettent :
   a) De donner la valeur de $S_n = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \cdots + \dfrac{2^n}{n!}$ en fonction de n. On remplira le tableau suivant pour valider cet algorithme :

n	1	2	3	10	20
S_n					

   b) De donner le nombres itérations nécessaire pour obtenir une précision donnée :

Précision 10^{-P}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
Nombre d'itération					

On pourra constater que 1 itération supplémentaire augmente la précision d'un facteur 10.

Exercice 14

Suite

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \,\mathrm{d}t$$

1) a) Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
   b) Étudier les variations de la suite (x_n).
   c) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite, (x_n) ?
2) a) Démontrer que, pour tour entier naturel n non nul :

$$x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   b) En déduire la limite de la suite (x_n).
3) a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$$

   b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$
4) On admet que, pour tout entier naturel n non nul :

$$y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$$

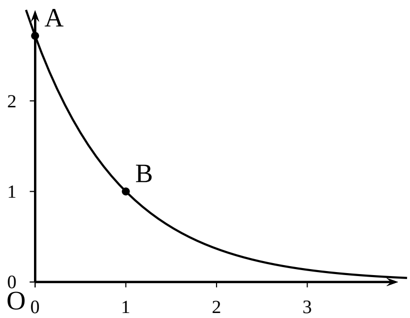
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n$

Exercice 15

Amérique du Sud nov 2004

On a représenté ci-contre, dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

(E) : $\quad y' + y = 0 \quad$ et telle que $\quad f(0) = e$



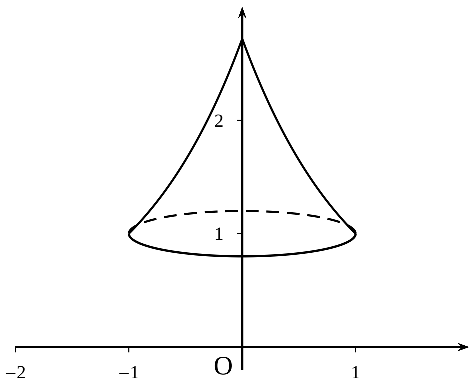
1) Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.
2) Soit t un réel donné de l'intervalle $[1\,;e]$.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{1-x} = t$ d'inconnue x.

3) Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.

   On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe AB comme représenté ci-contre. On note V son volume.

   On admet que $V = \pi \displaystyle\int_1^e (1 - \ln t)^2 \, dt$.

   Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



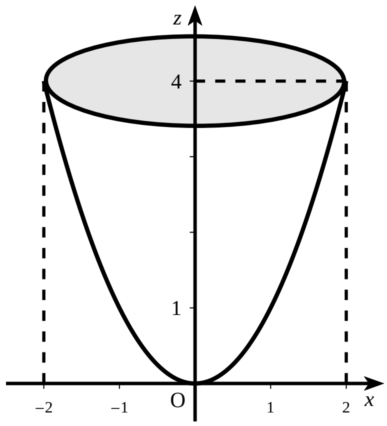
Exercice 16

Volume d'un phare

Calculer le volume V du phare ci-contre obtenu par révolution autour de l'axe (Oz) du morceau de parabole d'équation :

$$z = x^2$$

$(0 \leqslant x \leqslant 2)$ dans le plan (xOz) ; unité 6 cm



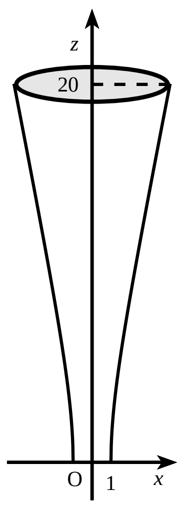
Exercice 17

Contenance d'un château d'eau

L'intérieur d'un château d'eau a la forme du solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de Oz) la branche d(hyperbole définie par :

$$z = 5\sqrt{x^2 - 1}$$

$0 \leqslant z \leqslant 20$. L'unité étant égale à 2 m, calculer la contenance du château d'eau (en hectolitre).



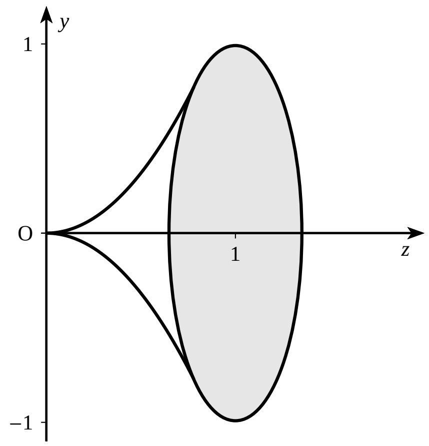
Exercice 18

La trompette

Déterminer le volume de la trompette obtenue par révolution autour de l'axe (Oz) du morceau de parabole d'équation :

$$y = z^2$$

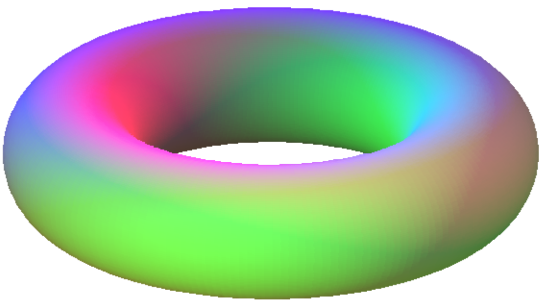
avec $0 \leqslant z \leqslant 1$

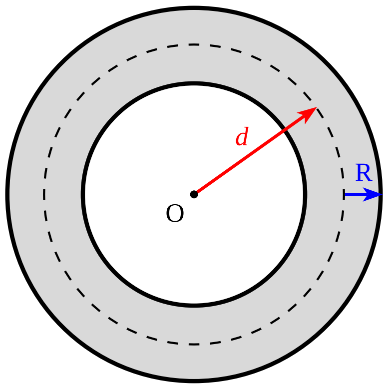


Exercice 19

Volume d'un tore

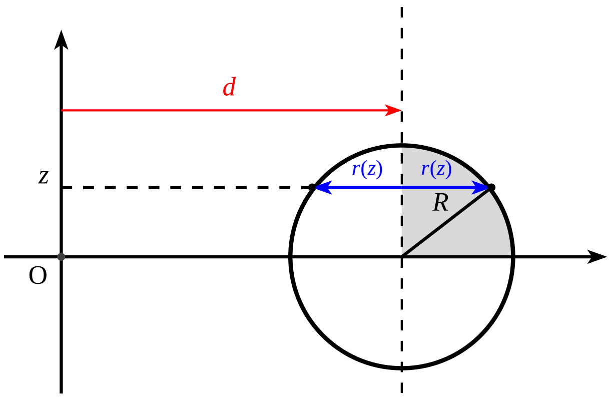
Un tore est un solide qui a la forme d'une « chambre à air » ou d'un « donut » pour les anglais. Il est caractérisé par d et R comme indiqué sur la figure suivante :





Si l'axe du tore est l'axe z alors lorsqu'on découpe le tore par des plan perpendiculaires à cet axe, on obtient des couronnes dont les rayon des cercles intérieur et extérieur sont respectivement $d + r(z)$ et $d - r(z)$.

On donne le schéma suivant :



1) Déterminer la surface d'une couronne d'altitude z en fonction de d et $r(z)$.

2) en déduire le volume du tore