La fonction puissance

Table des matières

1 Fonction puissance

1.1 Définition

Définition 1 : On appelle fonction puissance d'un réel a positif, la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$a > 0 \qquad f_a(x) = a^x \quad \text{avec} \quad a^x = e^{x \ln x}$$

Exemple : $3^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 3}$ et $5^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\ln 5}$

Remarque : Il s'agit de la généralisation de la fonction puissance avec les entiers relatifs. Cependant cette généralisation se fait au détriment de la puissance d'un nombre négatif qui était possible pour les entiers relatifs mais qui à cause de $\ln a$ devient impossible pour une puissance réel.

$(-3)^5$ est possible mais $(-3)^{\sqrt{2}}$ n'existe pas !

Conséquence La fonction puissance est strictement positive du fait de sa notation exponenetielle.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x > 0$$

1.2 Propriétés

On retrouve les mêmes propriétés de la fonction exponentielle avec la fonction puissance :

Propriété 1 : Pour tous réels positifs a et b, on a les égalités suivantes pour x et y réels :

$$\ln a^x = x \ln a$$
$$a^{x+y} = a^x \times a^y \quad \text{et} \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$
$$(a^x)^y = a^{xy}$$
$$(ab)^x = a^x \times b^x$$

1.3 Exercices

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2^x = 3^{2x+1}$

On revient à la notation exponentielle :

$$e^{x\ln 2} = e^{(2x+1)\ln 3}$$
$$x \ln 2 = (2x+1)\ln 3$$
$$x(\ln 2 - 2\ln 3) = \ln 3$$
$$x = \frac{\ln 3}{\ln 2 - 2\ln 3}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = \dfrac{3}{2}$

On revient à la notation exponentielle :

$$\begin{aligned} e^{x\ln\frac{1}{3}} &= e^{\ln\frac{3}{2}} \\ -x\ln 3 &= \ln 3 - \ln 2 \\ x &= \frac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 3} \end{aligned}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x \leqslant 3$

On revient à la notation exponentielle :

$$\begin{aligned} e^{x\ln\frac{1}{\sqrt{3}}} &\leqslant e^{\ln 3} \\ -\frac{1}{2}x\ln 3 &\leqslant \ln 3 \\ -\frac{1}{2}x &\leqslant 1 \quad \text{car } \ln 3 > 0 \\ x &\geqslant -2 \end{aligned}$$

$$S = [-2; +\infty[$$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$: $x^{\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{1}{2}$

On revient à la notation exponentielle :

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{2}\ln x} &\leqslant e^{\ln\frac{1}{2}} \\ \sqrt{2}\ln x &\leqslant -\ln 2 \\ \ln x &\leqslant -\frac{\ln 2}{\sqrt{2}} \\ x &\leqslant e^{-\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

$$S =]0; e^{-\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}}[$$

2 Etude de la fonction puissance

2.1 Variation

Soit la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = a^x$.

Comme $a^x = e^{x\ln a}$, elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car composition de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$f_a'(x) = \left(e^{x\ln a}\right)' = \ln a\, e^{x\ln a} = \ln a\, a^x$$

Le signe de la dérivée dépend donc du signe de $\ln a$. On a alors :

- Si $a > 1$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a'(x) > 0 \quad$ la fonction puissance est croissante.
- Si $0 < a < 1$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a'(x) < 0 \quad$ la fonction puissance est décroissante.

2.2 Limite en l'infini

$a > 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x \ln a = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

Par composition, on a

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

De même, on montre que :

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

$0 < a < 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x \ln a = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

Par composition, on a

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

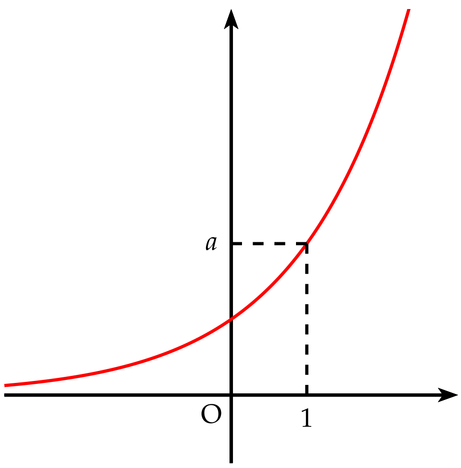
De même, on montre que :

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

2.3 Tableau de variation et courbe

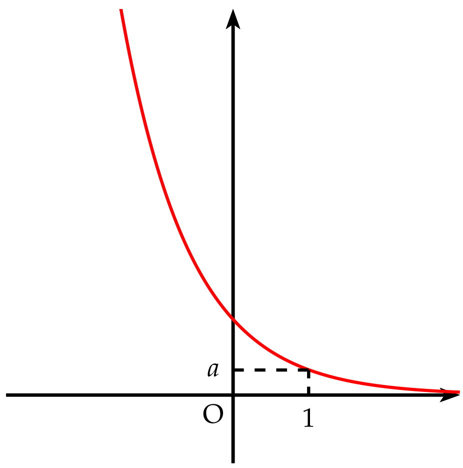
$a > 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'_a(x)$		$+$		
$f_a(x)$	0	1	a	$+\infty$



$0 < a < 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'_a(x)$		$-$		
$f_a(x)$	$+\infty$	1	a	0



2.4 Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x2^x$

1) **Limite en** $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par produit} \quad \lim_{x \to +\infty} x2^x = +\infty$$

2) **Limite en** $-\infty$.

forme indéterminée : $\infty \times 0$

On change la forme : $f(x) = xe^{x\ln 2}$

On pose alors : $X = x\ln 2$, on a alors :

$$\text{Si} \quad x \to -\infty \quad \text{on a :} \quad X \to -\infty$$

La fonction devient alors : $\dfrac{Xe^X}{\ln 2}$

or on sait que : $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$, donc on en déduit que :

$$\lim_{x\to-\infty} x2^x = 0$$

On en déduit une asymptote horizontale : l'axe des abscisses en $-\infty$.

3) **Variation**

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x\ln 2} + x\ln 2 e^{x\ln 2} \\ &= (1 + x\ln 2)2^x \end{aligned}$$

On sait que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2^x > 0 \quad$ donc : :

$$\text{signe} f'(x) = \text{signe}(1 + x\ln 2)$$

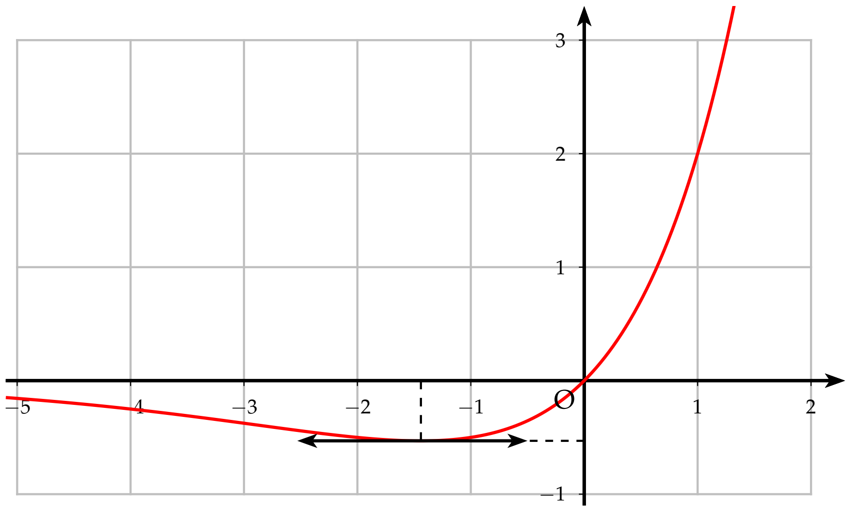
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{\ln 2} \quad (\simeq -1,14)$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{e\ln 2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) = -\frac{1}{\ln 2}e^{-\frac{1}{\ln 2}\ln 2} = -\frac{1}{e\ln 2} \quad (\simeq -0,53)$$

4) **La courbe**



2.5 Étude d'une fonction classique

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^x & \text{pour } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1) **Étude de la continuité en 0**

Pour $x > 0$, on a $f(x) = e^{x \ln x}$, on a alors les limites suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0_+} x \ln x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0_+} e^x = 1 \end{array}\right\} \quad \text{Par composition} \quad \lim_{x \to 0_+} x^x = 1$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0_+} x^x = f(0)$, la fonction est continue en 0.

2) **Étude de la dérivabilité en 0**

Il faut étudier le rapport $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ quand h tend vers 0.

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{e^{x \ln x} - 1}{h}$$

C'est une limite indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$. On change de variable : $H = h \ln h$

$$\text{Si} \quad h \to 0 \quad \text{on a :} \quad H \to 0$$

On a alors :

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{He^H - 1}{\frac{H}{\ln h}} = \ln h \, \frac{e^H - 1}{H}$$

Comme on sait que : $\lim\limits_{H \to 0_+} \dfrac{e^H - 1}{H} = 1$ et $\lim\limits_{h \to 0_+} \ln h = -\infty$, on a :

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{f(h) - 1}{h} = -\infty$$

f n'est pas dérivable en 0 mais sa courbe possède une tangente verticale en 0.

3) **Limite en l'infini**

On montre facilement par produit et composition que :

$$\lim_{x \to +\infty} x^x = +\infty$$

4) **Variation**

x^x est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car composition de fonctions dérivables sur cet intervalle. On a alors :

$$f'(x) = (\ln x + x \times \frac{1}{x})\, e^{x \ln x} = (\ln x + 1)\, x^x$$

Comme x^x est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\text{signe} f'(x) = \text{signe}(\ln x + 1)$$

De plus, on a :

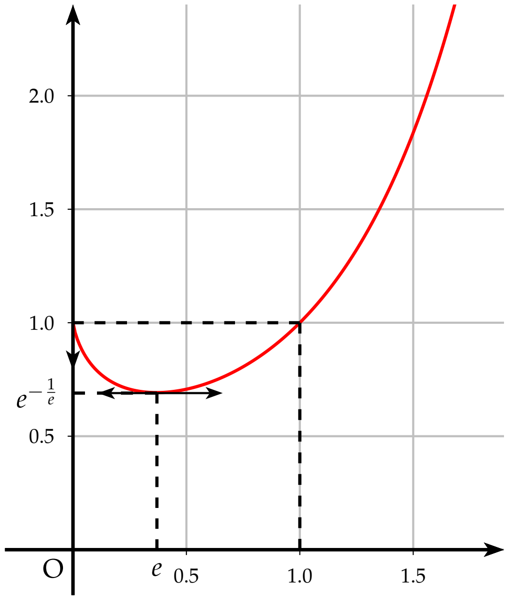
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{e} \quad (\simeq 0,37)$$

Comme la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction f' est négative puis positive. On a alors le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0		$+$		
$f(x)$	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}} \quad (\simeq 0,69)$$

5) **La courbe**



3 La racine n-ieme

3.1 Définition

Définition 2 : On appelle racine ne d'un nombre réel positif x, le nombre noté $\sqrt[n]{x}$ tel que :

$$n \geqslant 2 \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Remarque : Pour $x = 0$, on peut définir : $\sqrt[n]{0} = 0$.

Exemple : $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[5]{7} = 7^{\frac{1}{5}}$

Conséquence Pour x et y postifs, si $x^n = y$ alors $x = \sqrt[n]{y}$

3.2 Simplification et résolutions

1) Simplifier les expressions suivantes : $\sqrt{3}\,\sqrt[4]{36}$ et $\dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\,\sqrt[4]{36} &= 3^{\frac{1}{2}} \times \left(3^6\right)^{\frac{1}{4}}\\ &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\\ &= 3^2 = 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}\,\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} &= \frac{x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{3}}}\\ &= x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{12}}\end{aligned}$$

2) Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}_+$: $\sqrt[3]{x} \geqslant 8$

$$\sqrt[3]{x} \geqslant 8 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 8^3 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 512$$

3) Résoudre l'équation dans $\mathbb{R}_+^*$suivante : $\sqrt[3]{x} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} - 1 = 0$

en multipliant l'équation par $\sqrt[3]{x}$, on obtient :

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - \sqrt[3]{x} - 6 = 0$$

On pose alors $X = \sqrt[3]{x}$, avec $X > 0$. L'équation devient :

$$X^2 - X - 6 = 0$$

$X' = -2$ est racine évidente. De $P = -6$, on en déduit $X'' = 3$

Comme $X' < 0$, cette solution n'est pas retenue. On obtient alors :

$$X'' = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3^3 = 27$$

4 Croissance comparée

4.1 En + l'infini

Théorème 1 : Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

Remarque : La première limite a été vue dans le chapitre sur la fonction logarithme. L'idée consiste à faire un changement de variable $X = x^n$

Démonstration : De la deuxième limite. On utilise la notation exponentielle pour x^n. On a alors :

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^x}{e^{n \ln x}} = e^{x - n \ln x} = e^{x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right)}$$

Or on sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc on a :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} 1 - n\frac{\ln x}{x} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{par composition} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

4.2 En moins l'infini

Théorème 2 : Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n\, e^x = 0$$

Démonstration : Pour la première limite, on pose comme changement de variable $X = \frac{1}{x}$, on revient alors à une limite en $+\infty$

Pour la seconde limite, le changement de variable est $X = -x$, on revient alors à une limite en $+\infty$.

Remarque : Je laisse au lecteur le soin de faire ces deux démonstrations

4.3 Application : exo type BAC

f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{pour} \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Démontrer que la fonction f est dérivable en 0.

2) Étudier les variations de f et sa limite en $+\infty$.

3) On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f au point d'abscisse x_0.
   a) Écrire une équation de la tangente T en x_0 à $\mathscr{C}$.
   b) Déterminer x_0 pour que T passe par l'origine du repère orthonormal choisi.

4) Pour la valeur x_0 trouvée, tracer T puis $\mathscr{C}$ (unité graphique 6 cm)

1) Pour montrer que f est dérivable en 0, il faut montrer que la quantité suivante admet une limite finie en 0^+

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\dfrac{1}{h^2} e^{-\frac{1}{h}} - 0}{h} = \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^3}$$

On pose : $H = -\frac{1}{h}$, on a alors :

$$\text{Si} \quad h \to 0^+ \quad \text{alors} \quad H \to -\infty$$

La quantité devient alors :

$$\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^3} = \frac{e^H}{\left(-\dfrac{1}{H}\right)^3} = -H^3 e^H$$

Or on sait que $\lim_{H \to -\infty} H^3 \, e^H = 0$, donc on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$$

Conclusion : f est dérivable (donc continue) en 0 et sa courbe admet une tangente horizontale en 0.

2) **Variation :** La fonction f est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$. On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{x^3}\,e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x^4}\,e^{-\frac{1}{x}}\,(-2x+1) \end{aligned}$$

On sait que : $\quad \forall x \in]0;+\infty[$, on a $\quad \dfrac{1}{x^4}\,e^{-\frac{1}{x}} > 0$

On en déduit que :

$$\text{signe de } f'(x) = \text{signe de } (-2x+1)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

Limite en $+\infty$. On pose $X = -\dfrac{1}{x}$, donc :

$$\text{Si} \quad x \to +\infty \quad \text{alors} \quad X \to 0$$

On a : $\dfrac{1}{x^2}\,e^{-\frac{1}{x}} = X^2\,e^X$

Or on sait que : $\lim\limits_{X\to 0} X^2\,e^X = 0$ par produit des limites.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Tableau de variation

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{4}}\,e^{-\frac{1}{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4}{e^2} \simeq 0,54$

3) a) Tangente T en x_0

$$\begin{aligned} y &= f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{x_0}}}{x_0^4}\,(-2x_0+1)(x-x_0) + \frac{1}{x_0^2}\,e^{-\frac{1}{x_0}} \end{aligned}$$

b) Si T passe par l'origine, si l'on fait $x = 0$ dans l'équation de T, on trouve $y = 0$. On a alors :

$$\frac{e^{-\frac{1}{x_0}}}{x_0^4}(-2x_0+1)x_0 + \frac{1}{x_0^2}\,e^{-\frac{1}{x_0}} = 0$$
$$\frac{e^{-\frac{1}{x_0}}}{x_0^3}(-2x_0-1+x_0) = 0$$

Comme $\dfrac{e^{-\frac{1}{x_0}}}{x_0^3}$ ne s'annule par, on a :

$$3x_0 - 1 = 0$$
$$x_0 = \frac{1}{3}$$

On a alors l'équation de T :

$$y = 3^4 e^{-3}\left(-\frac{2}{3}+1\right)x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{27}{e^3}x$$

4) **Courbe et tangente** : on a $f\left(\dfrac{1}{3}\right) \simeq 0,44$