Contrôle de mathématiques

Mardi 25 septembre 2012

Exercice 1

ROC **3 points**

On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$

1) Montrer que la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ peut sécrire sous la forme

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

2) Application : déterminer la somme suivante : $S = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + + \dfrac{1}{27} + \cdots + + \dfrac{1}{6561}$

Exercice 2

Visualisation d'une suite **2 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x+1}$

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

On a tracé, en annexe , la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

1) Sur le graphique en annexe, placer sur l'axe des abscisses, u_0, u_1, u_2 et u_3. Faire apparaître les traits de construction.
2) Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

Exercice 3

Suite arithmético-géométrique **5 points**

(u_n) est la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,2u_n + 0,6$

1) a) Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 0,75$ est géométrique.
   b) En déduire l'expression de v_n puis u_n en fonction de n
   c) Déterminer la limite de la suite u_n.
2) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   a) Déterminer S_n en fonction de n
   b) Quelle est la limite de la suite (S_n) ?

Exercice 4

Evolution d'une population : le modèle de Malthus **3 points**

Une première approche pour modéliser l'évolution d'une population consiste à considérer que les ressources de la population étudiée sont illimitées. On fait alors l'hypothèse que *l'accroissement de la population d'une année à l'autre est proportionnel à l'effectif de cette population.*

Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'effectif de la population à l'année n. P_n est donc un réel positif. D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante réelle $k > -1$, dépendant des taux de mortalité et de natalité telle que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = kP_n$$

1) Justifier que la suite (P_n) ainsi définie est géométrique. On donnera la raison de cette suite en fonction de la valeur de k
2) Déterminer le sens de variation de la suite (P_n) en fonction de la valeur de k.
3) Donner l'expression de P_n en fonction de n. On appellera P_0 la population à l'année de référence.
4) Préciser la limite de la suite (P_n) en fonction de la valeur de k.
5) Interpréter les résultats des questions 2) et 4) en termes d'évolution de population.

Exercice 5

Algorithme et suite **7 points**

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.

Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à $N - 1$
Affecter à U la valeur $3U - 2k + 3$
Fin pour

Sortie
Afficher U

1) Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$?

   On donnera la valeur de U obtenue à chaque boucle

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

1) Calculer u_1 et u_2.
2) On admettra que : pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant n$

   Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3) Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n
   c) Déterminer la limite de v_n puis de u_n.
4) Soit p un entier naturel non nul.

   Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$. On écrira l'algorithme en pseudo code, puis on testera cet algorithme avec $p = 6$.

Annexe

(À rendre avec la copie)