

Contrôle de mathématiques

Jeudi 22 novembre 2012

EXERCICE 1

Continuité et dérivabilité

(3,5 points)

f est la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x - 4 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x-5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f .

- 1) Montrer que f est continue en 1.
- 2) f est-elle dérivable en 1 ? Justifier
- 3) La droite d'équation $x = 0$ est-elle asymptote à \mathcal{C}_f ? Justifier
- 4) La droite d'équation $y = 1$ est-elle asymptote à \mathcal{C}_f ? Justifier.

EXERCICE 2

Étude d'une fonction

(3,5 points)

Soit la fonction f définie sur $] -\infty, 1]$ par : $f(x) = 2x\sqrt{1-x}$

- 1) Déterminer la limite de f en $-\infty$
- 2) Sur quelle intervalle la fonction f est-elle dérivable ? Pourquoi ? Déterminer alors la dérivée de la fonction f sur cet intervalle.
- 3) Dresser le tableau de variation de la fonction f . On donnera la valeur exacte de l'extremum de la fonction f .

EXERCICE 3

Calcul de limites

(4 points)

Déterminer, en vous justifiant, les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - 2x$
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{2}{3x-1}\right)$
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sin x}{x-1}$

EXERCICE 4

Continuité et suite

(3 points)

f est la fonction définie sur $[0; 9]$ par : $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$

- 1) Étudier les variations de la fonction f sur $[0; 9]$.
- 2) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
 - a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 9$
 - b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 5

Fonction auxiliaire

(6 points)

- 1) Soit le polynome P défini sur \mathbb{R} par : $P(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$
- a) Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ du polynome P
 - b) Déterminer les variations de P sur \mathbb{R} .
 - c) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} et que $\alpha \in [-1, 0]$.
 - d) Donner un encadrement de α à 10^{-5}
 - e) Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x
- 2) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - \frac{2}{x^2 + 1}$
- On admet que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- a) Déterminer la dérivée de f et montrer que : $f'(x) = \frac{(x+1)P(x)}{(x^2+1)^2}$
 - b) A l'aide de la question 1e) déterminer le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f