# Correction contrôle de mathématiques

## Lundi 09 décembre 2013

## Exercice 1

**ROC** **(3 points)**

1) Cf cours
2) Cf cours
3) Cf cours

## Exercice 2

**Propriétés, équation et inéquation** **(2 points)**

1) On utilise les identités remarquables

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 &= \frac{(e^x)^2+2+(e^{-x})^2}{4}-\frac{(e^2)^2-2+(e^{-x})^2}{4}\\ &= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4}\\ &= \frac{4}{4}=1\end{aligned}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $e^{2x+1}-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{2x+1}=1 \quad\Leftrightarrow\quad e^{2x+1}=e^0$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on a :

$2x+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-\dfrac{1}{2} \quad$ soit $\quad S=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

b) Comme la fonction exp est strctement positive sur $\mathbb{R}$ :

$$\frac{e^x+3}{e^x+1}>2 \quad\Leftrightarrow\quad e^x+3>2e^x+2 \quad\Leftrightarrow\quad -e^x>-1 \quad\Leftrightarrow\quad e^x<e^0$$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on a :

$$x<0 \quad \text{soit} \quad S=]-\infty;0[$$

## Exercice 3

**Exercice bac** **(7,5 points)**

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**

a) Limite en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par produit et somme}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\end{array}$$

$g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit et somme de fonctions dérivables :

$$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(x+2)$$

Comme $x \geqslant 0$, $e^x > 0$ et $x + 2 > 0$. Donc $g'(x) \geqslant 0$, la fonction $g$ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On a alors le tableau de variation suivant :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

b) Sur $\mathbb{R}_+$,
- la fonction $g$ est continue (car dérivable), monotone (croissante)
- et $0 \in g(\mathbb{R}_+) = [-1; +\infty[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $g(a) = 0$

c) A l'aide d'une méthode par dichotomie, on trouve : $0,703 \leqslant a \leqslant 0,704$

d) Comme la fonction $g$ est croissante, on a :
- Si $x < a$, $g(x) < 0$
- Si $x > a$, $g(x) > 0$

## 2) Étude de la fonction $f$

a) On détermine les limites en 0 et $+\infty$ par somme :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par somme} \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Par somme} \quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

b) On a : $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2e^x - 1}{x} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c) D'après l'étude de la fonction $g$, on a sur $\mathbb{R}_+^*$, le tableau de variation suivant :

| $x$ | $0$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(a)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

d) Le minimum $m$ de la fonction vaut : $f(a) = e^a + \dfrac{1}{a}$

or, on sait que $g(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2e^a - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^a = \dfrac{1}{a^2}$

En remplaçant, on trouve alors : $f(a) = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$

e) D'après la question 1c), on sait que : $0,703 \leqslant a \leqslant 0,704$

Comme la fonction inverse est décroissante et la fonction carrée croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a alors :

$$\frac{1}{0,704} \leqslant \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{0,703} \quad \text{et} \quad \frac{1}{0,704^2} \leqslant \frac{1}{a^2} \leqslant \frac{1}{0,703^2}$$

Par somme, on obtient alors : $\dfrac{1}{0,704} + \dfrac{1}{0,704^2} \leqslant m \leqslant \dfrac{1}{0,703} + \dfrac{1}{0,703^2} \Leftrightarrow$ $3,43 \leqslant m \leqslant 3,45$

## Exercice 4

**Fonctions logistiques** **(7,5 points)**

### Partie A

1) On a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par compostion} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0\end{array} \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par compostion} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty\end{array}$$

Par somme et quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$ Par somme et quotient : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = 0$

On a donc deux asymptotes horizontales d'équation $y = 0$ et $y = 1$ respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

2) On a : $f_1(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^x}{e^x(1+e^{-x})} = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

3) On dérive avec la deuxième forme :

$$f_1'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ donc $f_1'(x) > 0$. La fonction $f_1$ est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

### Partie B

1) On prend pour $f_1(x)$ la deuxième forme. On a alors :

$$f_1(x) + f_{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x+1}{e^x+1} = 1$$

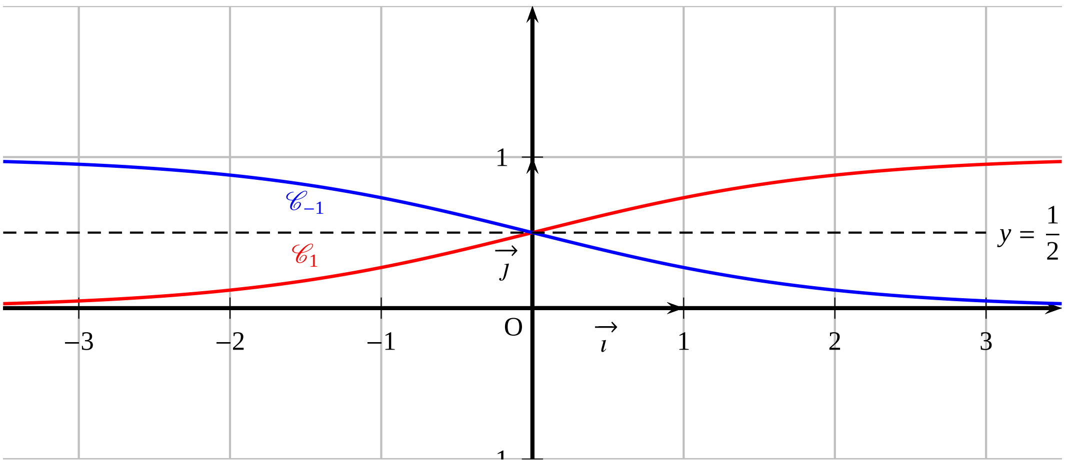
2) On a : $\mathrm{M}(x, f_{-1}(x))$ et $\mathrm{P}(x, f_1(x))$

or $\mathrm{K} = m[\mathrm{MP}]$ donc son ordonnée vaut pour tout réel $x$ : $y_{\mathrm{k}} = \dfrac{f_{-1}(x) + f_1(x)}{2} = \dfrac{1}{2}$

K appartient donc à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$

La courbe $\mathscr{C}_{-1}$ est donc symétrique à la courbe $\mathscr{C}_1$ par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$

3) On a alors :




**Partie C**

1) **Vrai** Il suffit d'encadrer la fonction $f_k$ :

On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ e^{-kx} > 0$, on en déduit alors :

- $\dfrac{1}{1+e^{-kx}} > 0$
- $1 + e^{-kx} > 1$ en prenant l'inverse on a : $\dfrac{1}{1+e^{kx}} < 1$

On a donc $0 < f_k(x) < 1$ la courbe $\mathscr{C}_k$ est donc comprise entre les droites $y = 0$ et $y = 1$

2) **Faux** Le contre exemple est tout trouvé. D'après la courbe $\mathscr{C}_{-1}$, on déduit que la fonction $f_{-1}$ est décroissante.

On pouvait aussi déterminer la dérivée : $f'_{-1} = \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2} < 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

3) **Vrai** en effet : $k \geqslant 10 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{2}k \geqslant 5 \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{1}{2}k \leqslant -5$

Comme la fonction exponentielle est croissante et la fonction inverse est décroissante, on a :

$$e^{-\frac{1}{2}k} \leqslant e^{-5} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + e^{-\frac{1}{2}k} \leqslant 1 + e^{-5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{2}k}} \geqslant \frac{1}{1+e^{-5}}$$

donc : $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{2}k}} \geqslant 0,9933 \geqslant 0,99$