Correction devoir du lundi 6 janvier 2014

EXERCICE I

Equation **4 points**

1) a) $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$

Conditions d'existence : $\begin{cases} x+1>0 \\ x+3>0 \\ x+7>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>-3 \\ x>-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ D_f=]-1;+\infty[\end{cases}$

$x \in D_f$, $\ln[(x+1)(x+3)]=\ln(x+7)$

comme la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$(x+1)(x+3)=x+7$

$x^2+3x+x+3=x+7$

x^2+3x-4

$x_1=1 \in D_f$ racine évidente $P=-4$ donc $x_2=-4 \notin D_f$ soit $S=\{1\}$

b) $\ln(3x^2-x-2)>\ln(6x+4)$

Racines de $3x^2-x-2$, $x_1=1$ (racine évidente) $P=-\dfrac{2}{3}$ donc $x_2=-\dfrac{2}{3}$

Conditions d'existence :

$\begin{cases} 3x^2-x-2>0 \\ 6x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]-\infty;-\dfrac{2}{3}\right[\cup]1;+\infty[\\ x>\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ D_f=]1;+\infty[\end{cases}$

$x \in D_f$, $\ln(3x^2-x-2)>\ln(6x+4)$

comme la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$3x^2-x-2=6x+4$

$3x^2-7x-6>0$

On calcule : $\Delta=49+72=121=11^2$ on a

$$x_1=\frac{7+11}{6}=3 \quad \text{ou} \quad x_2=\frac{7-11}{6}=-\frac{2}{3}$$

On prend l'intersection de l'extérieur des racines et de D_f

$$S=\left(\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup]3;+\infty[\right)\cap]1;+\infty[=]3;+\infty[$$

2) a) On développe :

$$(x+1)(2x^2-5x+2)=2x^3-5x^2+2x+2x^2-5x+2=2x^3-3x^2-3x+2$$

b) On pose : $X = \ln x$, l'équation devient $2X^3 - 3X^2 - 3X + 2 = 0$

D'après 2a), on a alors : $(X+1)(2X^2 - 5X + 2) = 0$

$X + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = -1$ ou

$2X^2 - 5X + 2 = 0$ on calcule $\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2$ on a

$$X_1 = \frac{5+3}{4} = 2 \quad \text{ou} \quad X_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

On revient à x : $\ln x = -1$ ou $\ln x = 2$ ou $\ln x = \dfrac{1}{2}$

On trouve alors : $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ ou $x = e^2$ ou $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ soit

$S = \left\{\dfrac{1}{e};\ \sqrt{e}\,;\ e^2\right\}$

Exercice II

Fonction auxiliaire **8 points**

Partie A

1) Limite de g en 0 et en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} 2x^3 - 1 = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} 2\ln x = -\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par somme}\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} g(x) = -\infty\end{array} \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^3 - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 2\ln x = +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par somme}\\ \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty\end{array}$$

La fonction g est la somme de deux fonctions croissantes sur $]0;+\infty[$ $x \mapsto 2x^3 - 1$ et $x \mapsto 2\ln x$ donc donc g est croissante sur $]0;+\infty[$

2) Sur $]0;+\infty[$, la fonction g est continue (car somme de deux fonctions continues), monotone (croissante) et $0 \in g(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in]0;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$

On trouve : $0,86 < \alpha < 0,87$

3) D'après la croissance de la fonction g, on a :

- Si $x < \alpha$, $g(x) < 0$
- Si $x > \alpha$, $g(x) > 0$

Partie B

1) Limite en 0

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} -\ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^+\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient}\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} -\dfrac{\ln x}{x^2} = +\infty\end{array}, \quad \text{or } \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0 \text{ par somme } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty$$

Limite en $+\infty$, on change la forme de $f(x)$: $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln x}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par produit}\\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln x}{x} = 0\end{array}, \quad \text{or } \lim\limits_{x\to +\infty} 2x = +\infty \text{ par somme } \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

2) La distance d de $\mathscr{C}$ à Δ est donné par : $d = |f(x) - 2x| = \left|\dfrac{\ln x}{x^2}\right|$

or d'après la question 1), on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, donc la distance de $\mathscr{C}$ à Δ tend vers 0 en $+\infty$.

La position relative en $\mathscr{C}$ et Δ est donnée par le signe de $f(x) - 2x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$, donc par le signe de $-\ln x$.

- Si $0 < x < 1$, $-\ln x > 0$ donc $\mathscr{C}$ est au dessus de Δ.
- Si $x > 1$, $-\ln x < 0$ donc $\mathscr{C}$ est en dessous de Δ.

3) On peut proposer l'algorithme suivant.

Si $p = 3$, on trouve $N = 65$

Variables
P, N entiers naturels
Initialisation et entrée
Lire P
$0 \to N$
Traitement
Tant que $-\dfrac{\ln N}{N} \geqslant 10^{-P}$
  $N + 1 \to N$
Fin Tanque
Sortie
Afficher N

4) $f'(x) = 2 - \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln x}{x^4} = 2 - \dfrac{x - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \dfrac{g(x)}{x^3}$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

5) On obitent le tableau de variation suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

6) Voir la courbe en annexe 1

Exercice III

Déterminer une fonction **2 points**

1) On a : $f(1) = 3$ et $f'(1) = 0$ (tangente horizontale)

2) On dérive la fonction f :

$$f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - (a + b\ln x)}{x^2} = \frac{b - a - b\ln x}{x^2} = \frac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$$

3) D'après la forme de la fonction f et de la dérivée f', on a :

$f(1) = a$ et $f'(1) = b - a$ donc $a = 3$ et $b - a = 0$ d'où $b = 3$

La fonction f est donc : $f(x) = \dfrac{3 + 3\ln x}{x}$

EXERCICE IV

Suite et fonction logarithme **6 points**

1) a) Limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} x = 1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \ln x = 0^+\end{array}\right\} \text{ Par quotient } \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty \qquad \left.\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+\right\} \text{ Par quotient } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

b) On calcule la dérivée :

$$f'(x) = \frac{\ln x - x \times \dfrac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e$
- Le signe de $f'(x)$ est le signe de $\ln x - 1$ car $\forall x > 1,\ \ln^2 x > 0$

Comme la fonction ln est croissante sur $]1;+\infty[$, on a :

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) Voir annexe 2

On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle converge vers l'abscisse du point d'intersetion de la courbe $\mathscr{C}$ avec la droite d'équation $y = 0$.

b) Soit la proposition P_n : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant e$

- **Initialisation :** pour $n = 0$, on a $u_0 = 9 \geqslant e$. P_0 est vraie.
- **Hérédité :** On admet que $u_n \geqslant e$ montrons que $u_{n+1} \geqslant e$

  On sait donc que $u_n \geqslant e$, comme la fonction f est croissante si $x \geqslant e$ (question 1b), on a alors $f(u_n) \geqslant f(e)$ donc que $u_{n+1} \geqslant e$

  P_n est donc héréditaire
- Par initialisation et hérédité, $u_n \geqslant e$ pour tout naturel.

c) On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\ln u_n} - u_n = \frac{u_n(1 - \ln u_n)}{\ln u_n}$$

On sait que pour tout naturel n, on a $u_n \geqslant e$ donc $\ln u_n \geqslant 1$ donc $\dfrac{u_n}{\ln u_n} > 0$ et $1 - \ln u_n \leqslant 0$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, la suite (u_n) est décroissante.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par e, elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant e$

3) **Théorème du point fixe :** « Soit une suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers ℓ. Si la fonction associée f est continue en ℓ, alors la limite de la suite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. »

On résout alors : $x = \dfrac{x}{\ln x} \quad \Leftrightarrow \quad x \ln x = x \quad \Leftrightarrow \quad x(\ln x - 1) = 0$

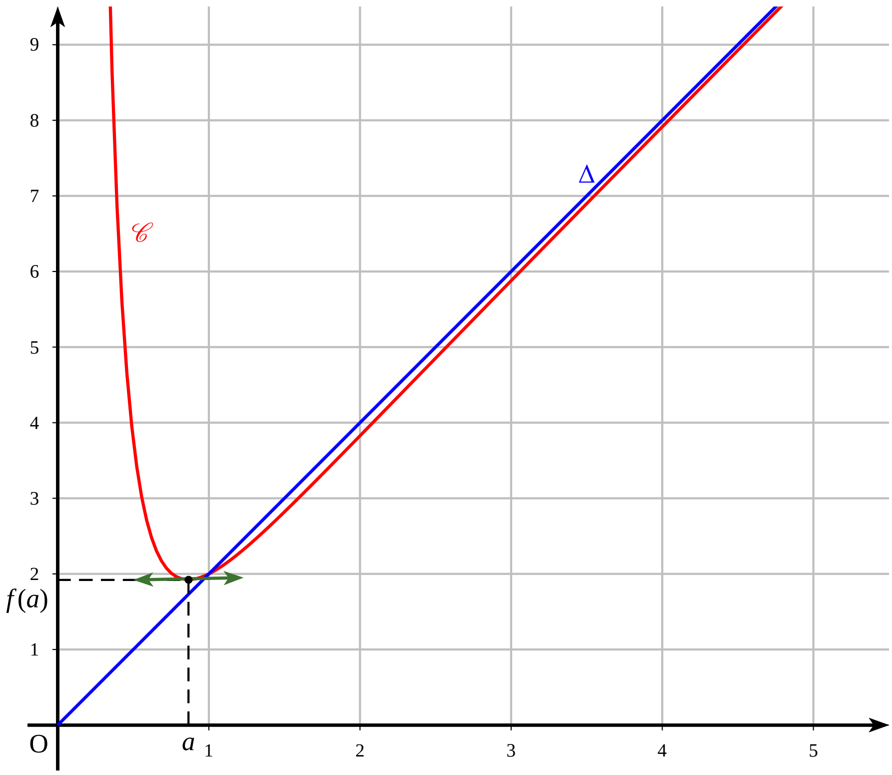
Cette équation a deux solutions : $x = 0$ et $\ln x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e$

Comme $\ell \geqslant e$ on en déduit que la suite (u_n) converge vers e.

Annexes

(À rendre avec la copie)

Annexe 1



Annexe 2