

BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- ▶ le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.
- ▶ **votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.

EXERCICE 1**(5 points)****Partie A**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .
On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives :

$$a = -1 + 2i \quad ; \quad b = -2 - i \quad ; \quad c = -3 + i$$

- 1) a) Placer les points A, B, C sur l'annexe à rendre avec la copie.
- b) Calculer le rapport : $\frac{b}{a}$
- c) En déduire la nature du triangle OAB. On justifiera la réponse.
- 2) On considère l'application f qui à tout point M d'affixe $z \neq b$, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z + 1 - 2i}{z + 2 + i}$$

- a) Déterminer l'affixe c' du point C', image de C par f et placer le point C'.
- b) Déterminer l'ensemble \mathcal{E} des points M d'affixe z avec $z \neq b$ tels que $|z'| = 1$.
Placer \mathcal{E} sur la figure.
- c) Justifier que \mathcal{E} contient les points O et C.

Partie B

Soit deux nombres complexes z_1 et z_2 définis par : $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = (1 + i)z_1$

- 1) Déterminer la forme algébrique de z_2 .
- 2) Déterminer la forme exponentielle de z_1 et de $1 + i$.
En déduire la forme exponentielle de z_2 .
- 3) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

EXERCICE 2**(5 points)**

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2x - 3 - 4 \ln x$.
On appelle \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

- 1) Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction f .
- 2) Montrer que la dérivée f' vérifie : $f'(x) = \frac{2(x-2)}{x}$
- 3) Dresser, en justifiant le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$
- 4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
- 5) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans l'intervalle $]0; +\infty[$. On appellera α la solution supérieure à 2.
- b) Montrer que $\alpha \in [2; 6]$.
A l'aide de l'algorithme par dichotomie donner un encadrement à 10^{-3} de la solution α ainsi que le nombre d'itérations nécessaires.

EXERCICE 3**(5 points)**

On désire réaliser un portail comme indiqué à l'annexe 1. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.

Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)e^{-4x} + b$$

où b est un nombre réel. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$.

- 1) a) Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 2]$.
b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$.
- 2) Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5 m.

Dans la suite la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)e^{-4x} + \frac{5}{4}.$$

Partie B : détermination d'une aire

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à 0,05 m de hauteur du sol.

- 1) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par

$$F(x) = \left(-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right)e^{-4x} + \frac{5}{4}x$$

est une primitive de la fonction f .

- 2) En déduire l'aire en m^2 de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire. (On s'intéresse ici à l'objet « vantail » sans faire référence à son environnement).

Partie C : utilisation d'un algorithme

On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur 0,12 m, espacées de 0,05 m. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail (voir l'annexe 2 de l'exercice 3) et le bas de chaque planche à 0,05 m de hauteur. Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.

- 1) Donner l'aire de la planche numéro k .
- 2) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

Variabiles : Les nombres X et S sont des nombres réels

Entrées et initialisation

On affecte à S la valeur 0
On affecte à X la valeur 0

Traitement

tant que $X + 0,17 < \dots$ **faire**

S prend la valeur $S + \dots$
 X prend la valeur $X + 0,17$

fin

Sorties : On affiche S

EXERCICE 4**(5 points)****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité****Partie A : ROC**

On admet l'inégalité de Bernoulli pour tout réel a positif, et pour tout naturel n : $(1+a)^n \geq 1+na$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 1$ et de premier terme $u_0 > 0$.

Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}$.

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

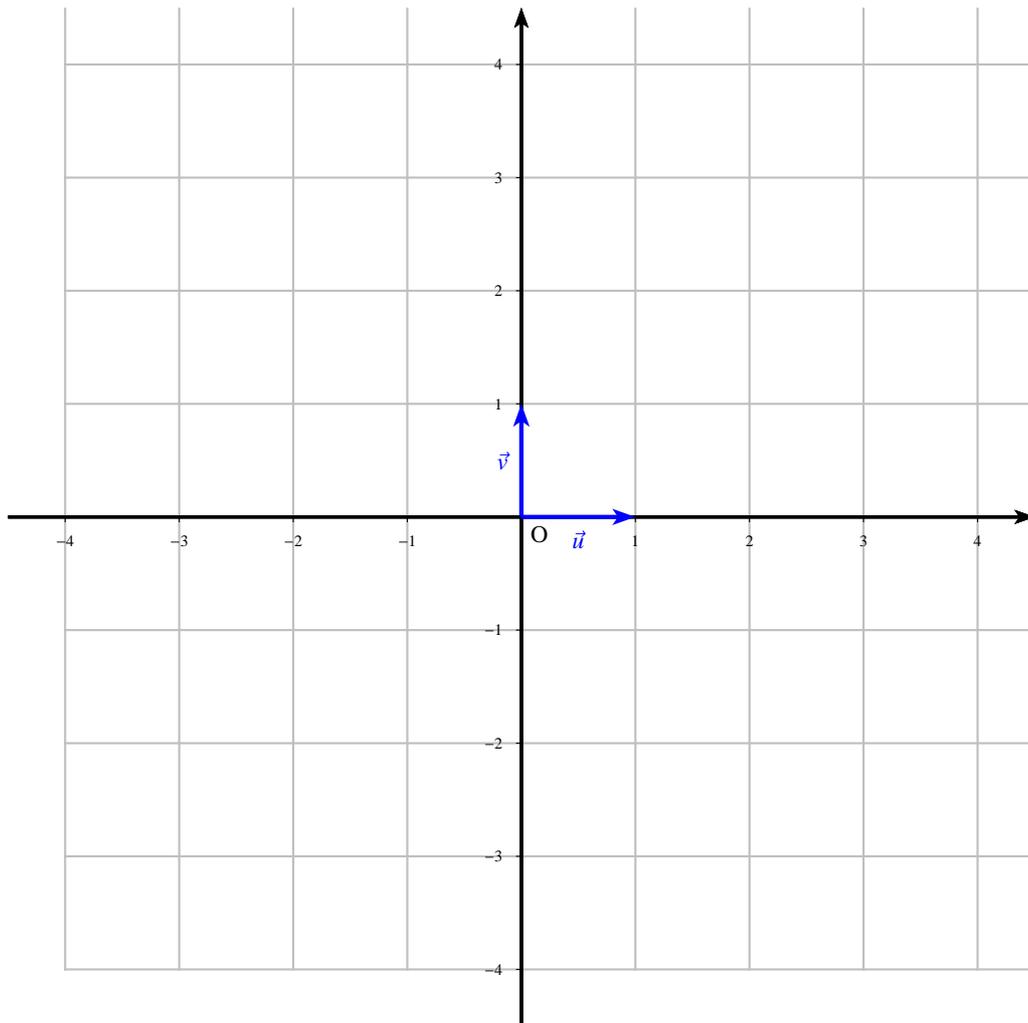
- 1) Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- 2) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On note α la solution.
On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
- 3) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - a) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$
où α est le réel défini dans la question 2)
 - b) Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.
- 4) Pour tout entier naturel n , on définit la suite (S_n) par

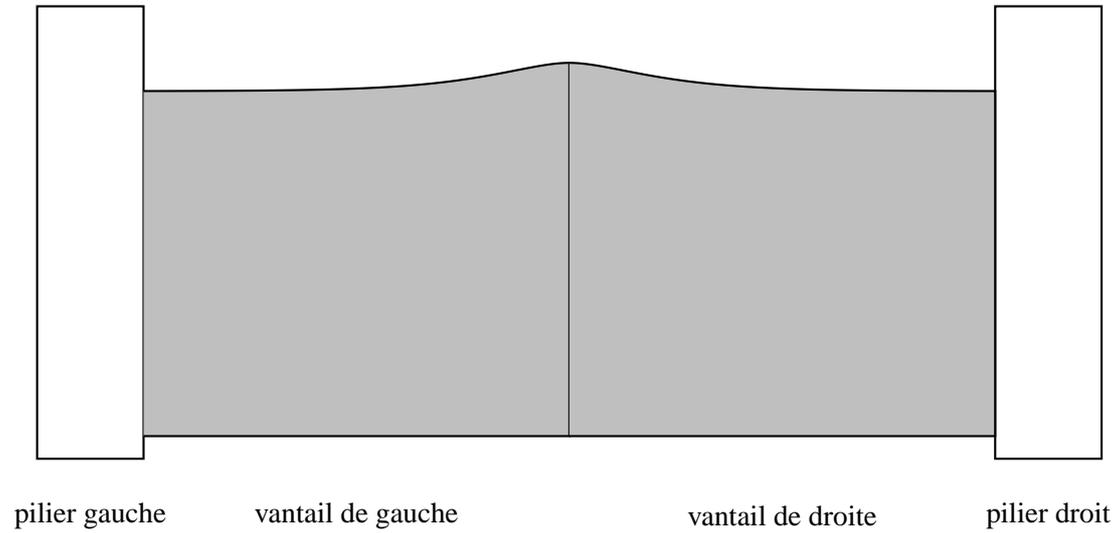
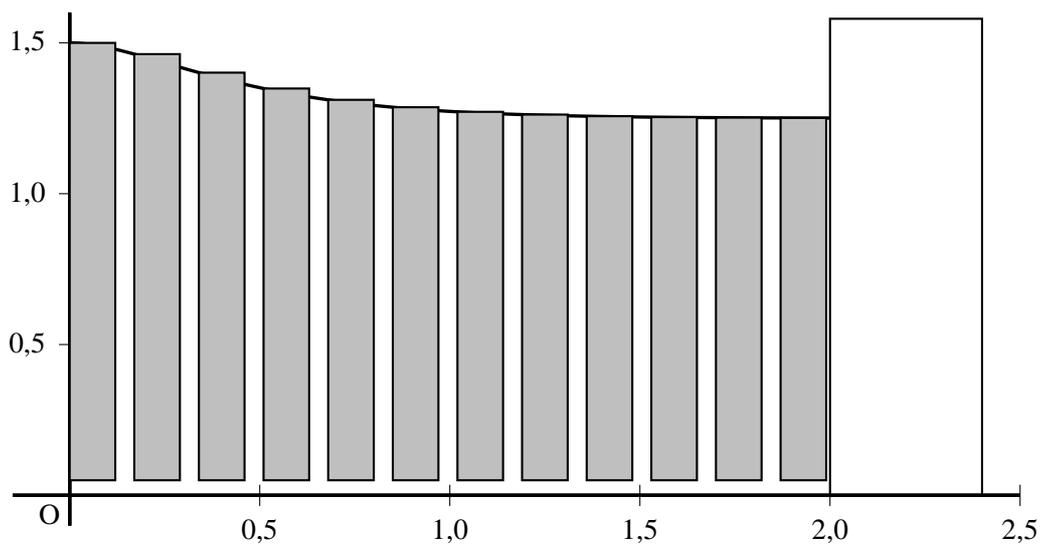
$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

- a) Calculer S_0 , S_1 et S_2 . Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.
- b) Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

Nom :

Prénom :

Annexe de l'exercice 1
(À rendre avec la copie)

Annexe 1 de l'exercice 3**Annexe 2 de l'exercice 3**

La distance entre le bas du portail et le sol est de 0,05 m.