

# Contrôle de mathématiques

Mardi 23 septembre 2014

## EXERCICE 1

### ROC

(4 points)

- 1) On considère une suite géométrique  $(u_n)$  de premier terme  $u_0$  et de raison  $q \neq 1$
- a) Montrer que la somme  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  peut s'écrire sous la forme
- $$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
- b) Application : déterminer la valeur exacte, puis sa valeur approchée à  $10^{-3}$  de la somme suivante :  $S = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^6$

## EXERCICE 2

### Somme et algorithme

(4 points)

On pose la somme suivante :  $T = 5 + 12 + 19 + 26 + \dots + 2014$

- 1) a) S'agit-il de la somme des termes d'une suite géométrique ou arithmétique ? Pourquoi ?
- b) Déterminer le nombre de termes de la somme  $T$ . (On détaillera les calculs)
- c) En déduire la valeur exacte de la somme  $T$
- 2) On désire vérifier le résultat obtenu pour  $T$  à l'aide d'un algorithme. On propose alors l'algorithme suivant où des instructions ont été remplacées par des pointillés ...
- a) Recopier cet algorithme et compléter les pointillés
- b) Rentrer cet algorithme dans votre calculatrice. Que trouvez-vous comme résultat ?

```

Variables : I, U, T entiers naturels
Entrées et initialisation
| 5 → U
| 5 → T
Traitement
| pour ..... faire
| | U + ... → U
| | T + ... → T
| fin
Sorties : Afficher T
  
```

## EXERCICE 3

### Médicament par injection

(8 points)

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

Le but de l'exercice est d'étudier pour 2 hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

- 1) On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n$  la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de  $n$  minutes. Ainsi  $u_0 = 10$ .
- Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$  ?
  - Pour tout entier naturel  $n$ , donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse.
- 2) On programme une machine de façon que :
- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
  - toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.
- On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $v_n$  la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de  $n$  minutes.
- Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = 0,8v_n + 1$ .
  - Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $w_n = v_n - 5$ .  
Démontrer que  $(w_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
  - En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - Quelle est la limite de la suite  $(v_n)$  ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

#### EXERCICE 4

---

##### Sens de variation

(2 points)

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour  $n \geq 4$  par :  $u_n = n^2 - 9n - 20$

- Calculer  $u_{n+1} - u_n$  en fonction de  $n$
- En déduire alors que la suite  $(u_n)$  est croissante.

#### EXERCICE 5

---

##### Suite définie par récurrence

(2 points)

On donne la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 & , & u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 1,5u_{n+1} - 0,5u_n \end{cases}$$

- Calculer les termes, en détaillant les calculs,  $u_2$  ;  $u_3$  ;  $u_4$ .
- Programmer cette suite sur votre calculette et donner sans justification les valeurs approchées à  $10^{-4}$  des termes  $u_{10}$  et  $u_{15}$ . Que peut-on conjecturer sur la limite de la suite  $(u_n)$  ?