# Contrôle de mathématiques

## Jeudi 15 octobre 2015

## EXERCICE 1

**ROC** **(2 points)**

Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli : soit un réel $a > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1 + na$$

## EXERCICE 2

**Récurrence** **(5 points)**

⚠ *On rédigera soigneusement les récurrences suivantes.*

a) Soit la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 5u_n - 8$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 + 5^n$

b) Soit la suite $(v_n)$ définie par : $v_0 = 10$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 6}$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3 \leqslant v_n \leqslant 10$

## EXERCICE 3

**Limites de suites** **(4 points)**

Déterminer les limites des suites $(u_n)$ suivantes :

a) $u_n = \dfrac{3n^2 - n}{1 - n^2}$

b) $u_n = 2\cos n - n^2$

c) $u_n = 5n + 1 - \dfrac{n}{n^2+1}$

d) $u_n = 3^n - 7^n$

## EXERCICE 4

**Algorithme** **(3 points)**

Soit la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = 1,4u_n - 0,05u_n^2$

On admet que cette suite est croissante et converge vers 8.

Écrire un algorithme permettant de donner le plus petit entier $n$ tel que : $|u_n - 8| < 10^{-3}$

Rentrer cet algorithme dans votre calculatrice et donner la réponse.

## EXERCICE 5

**Conjecture** **(4 points)**

Soit la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2(n+1)$

1) a) Déterminer les termes : $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$

b) La suite $(u_n)$ est-elle arithmétique ? géométrique ?

c) La conjecture $u_n = n(n+1)$ est-elle justifiée ?

2) a) On souhaite écrire un algorithme permettant de calculer $u_n$, $n$ étant donné.

Recopier et compléter les pointillés pour que l'algorithme ci-contre permette de répondre au problème posé.

**Variables** : $N$, $I$ entiers $U$ réels
**Entrées et initialisation**
  Lire $N$
  $\cdots \to U$
**Traitement**
  **pour** $I$ de ... à ... **faire**
    $\ldots\ldots \to U$
  **fin**
**Sorties** : Afficher $U$

b) Recopier et compléter le tableau suivant :

| $n$ | 10 | 20 | 50 | 85 |
|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | | | | |

c) La conjecture est-elle toujours vérifiée ? Pourquoi ?

## Exercice 6

**Vrai-Faux** **(2 points)**

*Pour chacune des affirmations suivantes, répondre par Vrai ou Faux et justifier votre réponse.*

a) Si, pour tout entier naturel $n$, on a $u_n \leqslant 0$ alors la suite $(u_n)$ converge.

b) Si, pour tout entier naturel $n$, on a $v_n \geqslant \dfrac{n}{4}$ alors la suite $(v_n)$ diverge vers $+\infty$.