

Contrôle de mathématiques

Lundi 14 décembre 2015

EXERCICE 1

ROC

(3 points)

On pose la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^x - x$.

- 1) Étudier les variations de f et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
- 2) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- 3) En faisant un changement de variable astucieux démontrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

EXERCICE 2

Propriétés, équation et inéquation

(3 points)

On justifiera chaque étape des résolutions suivantes.

- 1) Résoudre dans \mathbb{R} , les équations suivantes :
 - a) $e^{3x-1} = 1$
 - b) $e^{3-x} \times e^{2x-1} = (e^{5+x})^2$
- 2) Résoudre dans \mathbb{R} , l'inéquation suivante : $e^{x^2-x} < e$.

EXERCICE 3

Limite et dérivée.

(2 points)

- 1) En mettant en évidence les limites de référence, déterminer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3-x)e^x$.
- 2) Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{-x} - xe^{-x} + 1$.

EXERCICE 4

Fonction

(4 points)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$.

- 1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 2) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f .
- 3) En déduire les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

EXERCICE 5

D'après le bac

(7 points)

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = -1 \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$.

On pourra poser éventuellement $f(x) = e^{2x} - e^x$

- 1) Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = e^{2x} - e^x - x$
 - a) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.
 - b) Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
- 2) a) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
 - b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 0$.
 - c) Dédire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente vers ℓ .
 - d) Montrer que la limite ℓ vérifie l'équation : $g(x) = 0$. En déduire la limite ℓ
- 3) L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que : $|u_n| < 10^{-p}$, où p désigne un entier positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables : n, p : entiers u : réel

Entrées et initialisation

- | Saisir la valeur de p
- | n prend la valeur 0
- | u prend la valeur -1

Traitement

- | **tant que** **faire**
- |
- |
- | **fin**

Sorties : Afficher n

- a) Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.
- b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur affichée par cet algorithme pour $p = 2$.

EXERCICE 6

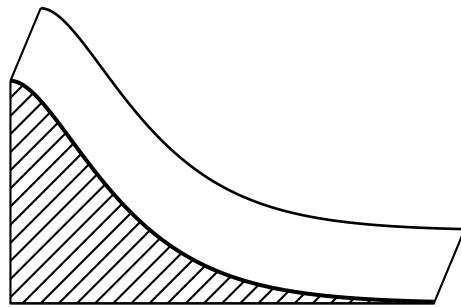
Trouver une fonction

(2 points)

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma ci-contre de ce toboggan en perspective cavalière.

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe \mathcal{C} représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 8]$ par :

$$f(x) = (ax + b)e^{-x} \text{ où } a \in \mathbb{N} \text{ et } b \in \mathbb{N}$$



La courbe \mathcal{C} est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.

- 1) On souhaite que la tangente à la courbe \mathcal{C} en son point d'abscisse 1 soit horizontale. Déterminer la valeur de l'entier b .
- 2) On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut. Déterminer la valeur de l'entier a .

