

Devoir à rendre pour le 03 novembre 2016

EXERCICE I

Étude d'une fonction

(10 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = \frac{x(x+1)}{x-2}$

Soit \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

- 1) a) Tracer cette fonction sur votre calculatrice, puis représenter rapidement l'allure de \mathcal{C}_f . On prendra comme fenêtre $x \in [-8; 12]$ et $y \in [-10; 20]$ et comme graduations 2 sur l'axe (Ox) et 5 sur l'axe (Oy).
Conjecturer alors les limites en $-\infty$, 2 et $+\infty$.
 - b) Démontrer ces conjectures.
- 2) a) Calculer la dérivée de la fonction f .
 - b) Déterminer les valeurs qui annulent la dérivée. En déduire les variations de la fonction f .
 - c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 3) a) Montrer que la fonction f peut s'écrire : $f(x) = x + 3 + \frac{6}{x-2}$
 - b) Tracer la droite d d'équation $y = x + 3$ sur votre calculatrice sur le même graphe que la fonction f . Que peut-on faire comme conjecture sur la droite d ?
 - c) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $f(x) - (x+3)$. Ces limites démontre-t-elle votre conjecture sur la droite d de la question 3) b) ? Pourquoi ?
- 4) a) Déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f en $x = 1$.
 - b) Existe-t-il des tangentes à \mathcal{C}_f parallèles à la droite d'équation $y = -x + 2$. Si oui en quels points ?

EXERCICE II

Calcul de dérivées

(6 points)

- 1) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.
 - a) Sur quel ensemble la fonction f est dérivable ?
 - b) Calculer la fonction dérivée f' .
 - c) Résoudre $f'(x) = 0$.
En déduire les intervalles où la fonction est croissante et décroissante.
- 2) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$
 - a) Sur quel intervalle la fonction est dérivable ?
 - b) Calculer la fonction dérivée f' .
 - c) Résoudre $f'(x) = 0$.
En déduire les intervalles où la fonction est croissante et décroissante.

EXERCICE III

Continuité**(2 points)**

Soit la fonction f définie sur $[-3 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} & \text{pour } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{1}{4} \end{cases} .$$

La fonction f est-elle continue en 1 ?

EXERCICE IV

Limites**(2 points)**

Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

1) Proposition 1 :

Si pour tout $x > 0$, on a $1 - \frac{2}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{3}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

2) Proposition 2 :

Si pour tout $x > 0$, on a $1 + \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{1}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ avec $\ell \in [1; 2]$.