Correction du devoir du mardi 3 janvier 2017

EXERCICE I

Équations et inéquations **(8 points)**

1) a) $\ln(x) + \ln(x-1) = \ln(6) \quad \Leftrightarrow \quad \ln x(x-1) = \ln 6$

Conditions : $\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \quad D_f =]1\,;+\infty[$

$x \in D_f$, la fonction ln étant monotone sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$x(x-1) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25 = 5^2, \quad \Delta > 0$ deux racines

$x_1 = \dfrac{1+5}{2} = 3 \in D_f \quad$ ou $\quad x_2 = \dfrac{1-5}{2} = -2 \notin D_f$

$S = \{3\}$

b) $\ln(3x) + \ln(2-x) = \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln 3x(2-x) = \ln 2$

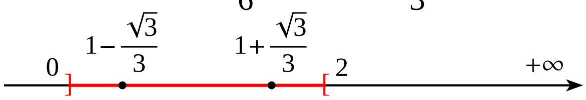
Conditions : $\begin{cases} 3x > 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow \quad D_f =]0\,;\ 2[$

$x \in D_f$, la fonction ln étant monotone sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$3x(2-x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 6x - 3x^2 - 2 = 0 \quad \overset{\times(-1)}{\Leftrightarrow} \quad 3x^2 - 6x + 2 = 0$

$\Delta = 36 - 24 = 12 = (2\sqrt{3})^2, \quad \Delta > 0$ deux racines

$x_1 = \dfrac{6 + 2\sqrt{3}}{6} = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \in D_f \quad$ ou $\quad x_2 = \dfrac{6 - 2\sqrt{3}}{6} = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \in D_f$



$S = \left\{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

2) a) $X^2 - 2X - 15 = 0$, on calcule $\quad \Delta = 4 + 60 = 64 = 8^2$

$\Delta > 0$, deux racines $\quad X_1 = \dfrac{2+8}{2} = 5 \quad$ ou $\quad X_2 = \dfrac{2-8}{2} = -3$

b) α) $e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$, on pose $X = e^x$, avec $X > 0$.

L'équation devient $X^2 - 2X - 15 = 0$. Seul X_1 convient, $e^x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln 5$

$S = \{\ln 5\}$

β) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 15 = 0$, on pose $X = \ln x$, l'équation devient $X^2 - 2X - 15 = 0$.

X_1 et X_2 conviennent. $\ln x = 5 \Leftrightarrow x = e^5 \quad$ ou $\quad \ln x = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3}$.

$S = \left\{e^{-3}\,;\ e^5\right\}$

3) a) $\ln x + \ln(2x+5) \leqslant \ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x(2x+5) \leqslant \ln 3$

Conditions : $\begin{cases} x > 0 \\ 2x+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \; D_f =]0\,;+\infty[$

$x \in D_f$, la fonction ln étant croissante sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$x(2x+5) \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 5x - 3 \leqslant 0$

$\Delta = 25 + 24 = 49 = 7^2$, $\Delta > 0$ deux racines

$x_1 = \dfrac{-5+7}{4} = \dfrac{1}{2}$ ou $x_2 = \dfrac{-5-7}{4} = -3 \quad \Rightarrow \quad S_1 = \left[-3\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$

$S = S_1 \cap D_f = \left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$

b) $\ln(x^2 - x - 2) > 2\ln(3-x) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2 - x - 2) > \ln(3-x)^2$

Conditions : $\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty\,;\,-1[\cup]2\,;+\infty[\\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow$

$D_f =]-\infty\,;\,-1[\cup]2\,;\,3[$

$x \in D_f$, la fonction ln étant croissante sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$x^2 - x - 2 > (3-x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 > 9 - 6x + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 5x > 11$

$x > \dfrac{11}{5} \quad \Rightarrow \quad S_1 = \left]\dfrac{11}{5}\,;+\infty\right[$

$S = S_1 \cap D_f = \left]\dfrac{11}{5}\,;\,3\right[$

4) a) $1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^n > 0,999 \quad \Leftrightarrow \quad -\left(\dfrac{1}{5}\right)^n > -0,001 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{1}{5}\right)^n < 10^{-3}$

Comme la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$, en composant par ln

$n \ln \dfrac{1}{5} < \ln 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad -n\ln 5 < -3\ln 10 \quad \Leftrightarrow \quad n > \dfrac{3\ln 10}{\ln 5}\ (\approx 4,29) \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant 5$

Le plus petit entier n est donc 5.

b) On peut proposer l'algorithme suivant pour vérifier la solution.

Variables : N : entier
Entrées et initialisation
| $0 \to N$
Traitement
| **tant que** $1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^N \leqslant 0,999$ **faire**
| | $N + 1 \to N$
| **fin**
Sorties : Afficher N

Exercice II

Dérivées et variation **(4 points)**

1) a) Dérivable si $\dfrac{x+1}{x} > 0$, donc $D_{f'} =]-\infty\,;-1[\cup]0\,;+\infty[$

$$f'(x) = 2 + \frac{\dfrac{x-(x+1)}{x^2}}{\dfrac{x+1}{x}} = 2 - \frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} = 2 - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{2x^2+2x-1}{x(x+1)}$$

b) Dérivable si $x > 0$, donc $D_{g'} =]0\,;+\infty[$

$$g'(x) = \frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)x^2 - 2x(x+\ln x)}{x^4} = \frac{x(x+1-2x-2\ln x)}{x^4} = \frac{1-x-2\ln x}{x^3}$$

2) a) $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x}\ln x - \dfrac{6}{x} = \dfrac{2\ln x - 6}{x} = \dfrac{2(\ln x - 3)}{x}$

b) • $f'(x) = 0 \iff \ln x = 3 \iff x = e^3$

• signe de $f'(x)$ = signe de $(\ln x - 3)$, fonction croissante :

x	0		e^3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	-4	$\nearrow$	

Exercice III

Limites **(3 points)**

1) On pose $f(x) = \dfrac{2\ln x + 1}{2x} = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{2}{2x}$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par somme} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\end{array}$$

2) On pose $X = \dfrac{1}{x}$ donc $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln(1+X)}{X}$

Si $x \longrightarrow +\infty$ alors $X \longrightarrow 0^+$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

3) On pose $f(x) = \ln(e^x - 1)$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^x - 1 = 0^+ \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par composition} \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}$$

EXERCICE IV

Étude d'une fonction **(5 points)**

1) f est continue en 0 si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} 1+x = 1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par somme}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)\end{array} \Rightarrow \quad f \text{ est continue en } 0.$$

2) $f(x) = x\left(\dfrac{1}{x} + 1 - \ln x\right)$, de $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on déduit :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} + 1 - \ln x = -\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par produit}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\end{array}$$

3) a) $f'(x) = 1 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = -\ln x$.

b) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$

4) a) Sur $[0\,;\,1]$, on a $f(x) \geqslant 1$ donc ne s'annule pas.

Sur $[1\,;+\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable), monotone (décroissante) et change de signe car $f(1) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

Conclusion : sur $[0\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) $f(4) = 1 + 4 - 4\ln 4 \approx -0,55$, donc $1 \leqslant \alpha \leqslant 4$.

Par l'algorithme de dichotomie, on trouve $3,59 \leqslant \alpha \leqslant 3,60$ après 9 itérations.