

# Contrôle de mathématiques

Mardi 14 mars 2017

## EXERCICE 1

### Primitive et intégrale

(5 points)

1) Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes sur l'intervalle I proposé. On indiquera clairement la forme utilisée pour déterminer la primitive.

a)  $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{3x+2}$ ,  $I = \left] -\frac{2}{3}; +\infty \right[$

b)  $g(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ ,  $I = \mathbb{R}$

c)  $h(x) = \frac{-3}{(2x+1)^2}$ ,  $I = \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$

2) a) Déterminer une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 3x^2 + x - 5 + e^{-x}$

b) En déduire la valeur de l'intégrale :  $I = \int_0^2 (3x^2 + x - 5 + e^{-x}) dx$

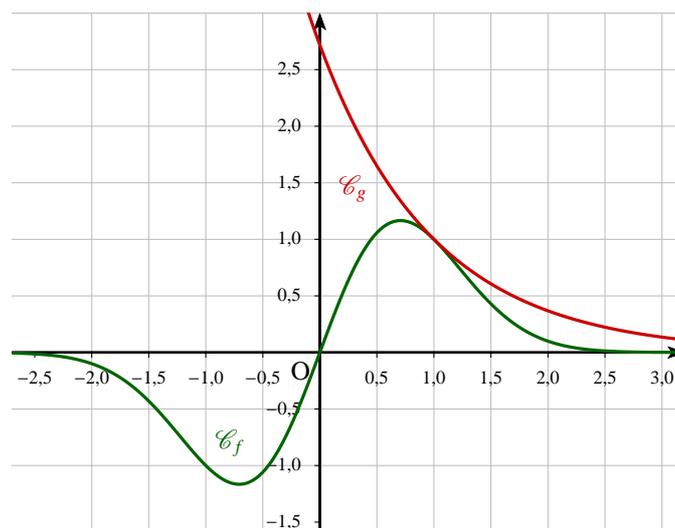
## EXERCICE 2

### Intégrale

(3 points)

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x e^{1-x^2}$  et  $g(x) = e^{1-x}$ .

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  respectivement des fonctions  $f$  et  $g$ .



1) Trouver une primitive  $F$  et  $G$  des fonctions  $f$  et  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) En déduire la valeur de  $\int_0^1 (e^{1-x} - x e^{1-x^2}) dx$ .

3) Interpréter graphiquement ce résultat.

### EXERCICE 3

#### ROC

(2 points)

- 1) Rappeler la définition de deux événements indépendants.
- 2) Démontrer que si les événements A et B sont indépendants, il en est de même pour les événements  $\bar{A}$  et B.

### EXERCICE 4

#### Ampoules

(6 points)

Les valeurs approchées des résultats seront données à  $10^{-4}$  près.

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A : 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B : 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

- A : « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B : « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D : « l'ampoule présente un défaut ».

- 1) On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
  - a) Construire un arbre pondéré représentant la situation.
  - b) Calculer la probabilité de tirer une ampoule sans défaut qui provienne de la machine B.
  - c) Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,930 5.
  - d) L'ampoule tirée est sans défaut.

Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

- 2) On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.

On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre d'ampoules sans défaut issues du prélèvement.

- a) Quelle est la loi que suit X. On se justifiera.
- b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 7 ampoules sans défaut.
- c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.
- d) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 2 ampoules présentant un défaut.

### EXERCICE 5

#### Lance-balle

(4 points)

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.

Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à  $10^{-3}$  près.

**Partie A**

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

- 1) Soit  $X$  la variable aléatoire qui associe le nombre de balles envoyées à droite. Quelle est la loi que suit  $X$ . On ne demande pas de justification.
- 2) Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?
- 3) Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

**Partie B**

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.

Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24 ;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235.

On définit les événements suivants :

- $D$  : « la balle est envoyée à droite » ;
- $L$  : « la balle est liftées » ;
- $C$  : « la balle est coupée ».

- 1) Recopier puis remplir le tableau de probabilité double entrée suivant :

	$D$	$\bar{D}$	Total
$L$			
$C$			
Total			1

- 2) Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?