Correction contrôle de mathématiques

Du mardi 20 septembre 2016

Exercice 1

Variation d'une suite **(2 points)**

1) $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3(n+1)+2}{(n+1)+4} - \frac{3n+2}{n+4} \\ &= \frac{3n+5}{n+5} - \frac{3n+2}{n+4} \\ &= \frac{(3n+5)(n+4) - (3n+2)(n+5)}{(n+4)(n+5)} \\ &= \frac{3n^2 + +12n + 5n + 20 - 3n^2 - 15n - 2n - 10}{(n+4)(n+5)} \\ &= \frac{10}{(n+4)(n+5)} \end{aligned}$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n+4 > 0$ et $n+5 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 2

Algorithme **(4 points)**

1) a) $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $\quad u_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$, $\quad u_3 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{3}{4}$, $\quad u_4 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{20} = \dfrac{4}{5}$

b) Au vu des résultats trouvés, on peut faire comme conjecture : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

2) Cf ci-contre

3) On obtient :

N	5	10	20	50	100
U	0.833	0,909	0,952	0,980	0,990

Variables : N, I entiers
U réel
Entrées et initialisation
Lire N
$0 \to U$
Traitement
pour I variant de 1 à N **faire**
$U + \dfrac{1}{I(I+1)} \to U$
fin
Sorties : Afficher U

4) On vu des résultats du tableau, on peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et converge vers 1.

Exercice 3

ROC et suite géométrique **(4 points)**

1) Voir le cours.

2) a) $u_4 = u_2 \times q^2 \quad \Leftrightarrow \quad q^2 = \dfrac{u_4}{u_2} = \dfrac{61,44}{96} = 0,64.$

Comme $q > 0$, $\quad q = \sqrt{0,64} = 0,8$ et $\quad u_2 = u_0 \times q^2 \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = \dfrac{u_2}{q^2} = \dfrac{96}{0,64} = 150.$

b) $S = u_0 \times \dfrac{1-q^{11}}{1-q} = 150 \times \dfrac{1-0,8^{11}}{1-0,2} = 750(1-0,8^{11}) \approx 685,575.$

Exercice 4

Production de bactéries **(5 points)**

1) a) u_n correspond à la masse de bactéries en grammes au bout de n jours.

Comme au départ, il y a 1 kg = 1000 g, on a bien $u_0 = 1000$.

Chaque jour la masse de bactéries augmente de 20 %, soit un coefficient multiplicateur de 1,2 et comme on perd 100 g par jour à cause du remplacement du milieu nutritif, on passe de la masse de bactéries le jour n à la masse de bactéries le jour $(n+1)$ par la relation $\quad u_{n+1} = 1,2u_n - 100$.

b) On peut programmer la suite sur la calculatrice avec les paramètres suivant :
$n_{min} = 0, \quad u(n) = 1.2u(n-1) - 100, \quad u_{n_{min}} = 1000.$
On programme alors un tableau de valeurs, et l'on trouve :
$u_{22} \approx 28\,103$ et $\quad u_{23} \approx 33\,624$.

Il faut donc attendre 23 jours pour que la masse de bactéries dépasse 30 kg.

c) On retrouve la valeur 23 à l'aide de l'algorithme.

Variables : N entier et U réel
Entrées et initialisation
  U prend la valeur 1000
  N prend la valeur 0
Traitement
  tant que $U \leqslant 30\,000$ **faire**
    U prend la valeur $1,2U - 100$
    N prend la valeur $N + 1$
  fin
Sorties : Afficher N

2) $u_{n+1} - u_n = 1,2u_n - 100 - u_n = 0,2u_n - 100$.

On sait que $\quad u_n \geqslant 1000 \quad \Rightarrow \quad 0,2u_n \geqslant 200 \quad \Rightarrow \quad 0,2u_n - 100 \geqslant 100 > 0.$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n > 0.$ La suite (u_n) est croissante.

3) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,2u_n - 100 - 500 = 1,2u_n - 600 = 1,2(u_n - 500) = 1,2v_n.$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1,2$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $\quad v_0 = u_0 - 500 = 500.$

b) $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,2^n$, d'où $\; u_n = 500 \times 1,2^n + 500 = 500(1 + 1,2^n).$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,2^n = +\infty$ car $\quad 1,2 > 1.$
Par produit et somme $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

EXERCICE 5

Suite récurrente à deux termes **(5 points)**

1) $u_2 = 4u_1 - 3u_0 = 4$, $\quad u_3 = 4u_2 - 3u_1 = 13$, $\quad u_4 = 4u_3 - 3u_2 = 40$.

2) Voir ci-contre

Variables : N, I entiers
U, V, W réels
Entrées et initialisation
Lire N
$0 \to U$
$1 \to V$
Traitement
pour I variant de 2 à N **faire**
$4V - 3U \to W$
$V \to U$
$W \to V$
fin
Sorties : Afficher V

3) a) On obtient

n	5	10	20
u_n	121	29 524	1 743 392 200

b) On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$.

4) $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 4u_{n+1} - 3u_n - u_{n+1} = 3u_{n+1} - 3u_n = 3(u_{n+1} - u_n) = 3v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 3$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$.

On a alors : $\quad v_n = v_0 \times q^n = 3^n$.

5) La suite (3^n) est croissante car $3 > 1$, donc la suite $\left(\dfrac{3^n - 1}{2}\right)$ est croissante.

$\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ car $3 > 1$, par somme et quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.