BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

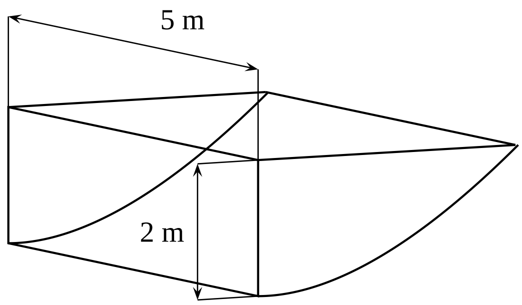
TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 1 (6 points)

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.
Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

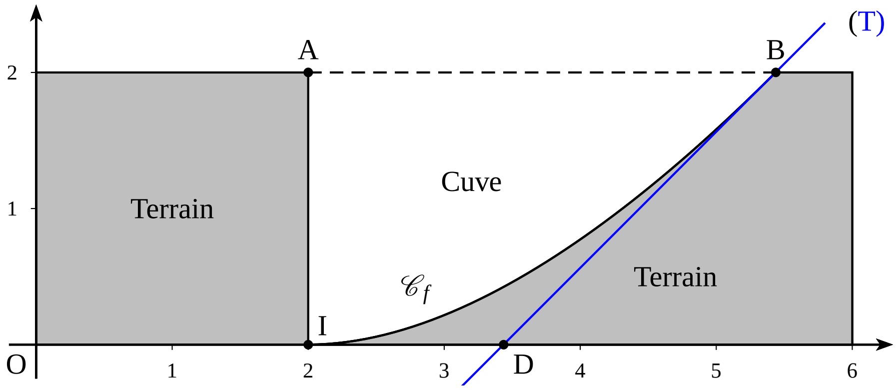
Cette cuve est schématisée ci-contre.



La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur $[2\,;\,2e]$ définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.
On considère les points A(2 ; 2), I(2 ; 0) et B(2e ; 2).



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1) Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

2) On note (T) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite (T) avec l'axe des abscisses.

   a) Déterminer une équation de la droite (T) et en déduire les coordonnées de D.

   b) On appelle $\mathcal{S}$ l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites d'équations $y = 2$, $x = 2$ et $x = 2e$.
   $\mathcal{S}$ peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB.
   Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

3) a) Montrer que, sur $[2\,;\,2e]$, la fonction G définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x^2}{4}$ est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

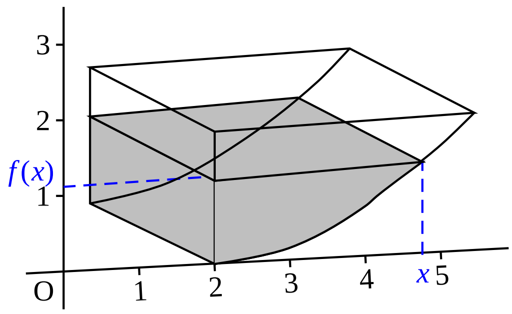
   b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,2e]$.

c) Déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{S}$ et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et $2e$, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;2e]$,

$$v(x) = 5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right]$$



1) Pourquoi l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution x_0 sur $[2\ ;\ 2e]$?
On admet que $x_0 \approx 4,311$, quel est alors le volume d'eau, au m^3 près, dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?

2) On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre. Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher. On précisera la méthode utilisée ainsi que la précision obtenue.

Variables : a, b réels
Entrées et initialisation
  a prend la valeur 2
  b prend la valeur $2e$
Traitement
  tant que $v(b) - v(a) > 10^{-3}$ **faire**
    c prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
    si $v(c) < \dfrac{V}{2}$ **alors**
      a prend la valeur c
    sinon
      b prend la valeur c
    fin
  fin
Sorties : Afficher $f(c)$

EXERCICE 2 (5 points)

Un parc d'attraction propose à son public un tout nouveau grand huit. Pour des raisons de sécurité, son accès n'est autorisé qu'aux personnes dont la taille est supérieure ou égale à 1,40 m et dont l'âge est compris entre 10 et 70 ans.
Des études statistiques sont menées pour évaluer l'affluence et la satisfaction des visiteurs pour ce manège.

On arrondira, si nécessaire, les probabilités à 10^{-4}.

1) a) La taille en centimètres d'un visiteur du parc, choisi au hasard, est modélisée par la variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance 165 et d'écart-type 20.
Quelle est la probabilité qu'un visiteur ait la taille requise pour accéder à ce grand huit ?

b) L'âge d'un visiteur du parc, choisi au hasard, est modélisé par la variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 30 et d'écart-type 17.
Quelle est la probabilité qu'un visiteur ait l'âge requis pour accéder à ce grand huit ?

c) Les études menées permettent d'établir que 89 % des visiteurs ont la taille exigée, 87 % ont l'âge requis mais 8 % n'ont ni la taille, ni l'âge obligatoires. Quelle est alors la proportion des visiteurs vérifiant les conditions requises pour essayer la nouvelle attraction ?

2) Un sondage est réalisé à la sortie du grand huit et révèle que 25 % des personnes ont attendu moins de 30 min avant de pouvoir essayer le manège. Parmi elles, 95 % sont satisfaites de l'attraction.
En revanche, 22 % des personnes ayant attendu plus de 30 min ne sont pas satisfaites de l'attraction.
On choisit au hasard un visiteur à sa sortie du grand huit.
On note A l'évènement « le visiteur a attendu plus de 30 min » et S l'évènement « le visiteur est satisfait de l'attraction ».

a) Montrer que la probabilité qu'un visiteur soit satisfait de l'attraction vaut 0,822 5.

b) Le directeur rencontre un visiteur insatisfait. Quelle est la probabilité que ce visiteur ait attendu moins de 30 min ?

EXERCICE 3 (4 points)

Soient les deux nombres complexes : $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}\,i$.

On pose : $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1) Donner la forme algébrique de Z.
2) Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
3) Écrire Z sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.
4) En déduire que $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
5) On admet que : $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b)$.
Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$:

$$\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\cos x - \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\sin x = -2\sqrt{3}.$$

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On arrondira, si nécessaire, les probabilités à 10^{-3}.

A Questions préliminaires

Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, où λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel a positif, on a : $p(\mathrm{T} \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda\, e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

1) Démontrer que, pour tout réel a positif, $p(\mathrm{T} > a) = e^{-\lambda a}$.

2) Quelle est la propriété d'une loi exponentielle que cela signifie-t-il ? On donnera l'égalité que cela entraîne.

B Application

1) On s'intéresse à la durée d'attente d'un client Internet lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur.

   Une étude permet de modéliser cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire D_1 qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,6.

   a) Quelle est la durée d'attente moyenne que peut espérer un client Internet qui appelle cette ligne d'assistance ?

   b) Calculer la probabilité que la durée d'attente d'un client Internet choisi au hasard soit inférieure à 5 minutes.

2) On s'intéresse maintenant à la durée d'attente d'un client mobile lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur. On modélise cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire D_2 qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, λ étant un réel strictement positif.

   a) Sachant que $p\,(\mathrm{D}_2 \leqslant 4) = 0,798$, déterminer la valeur de λ.

   b) En prenant $\lambda = 0,4$, peut-on considérer que moins de 10 % des clients mobile choisis au hasard attendent plus de 5 minutes avant de joindre un opérateur ?

   c) Un client choisi au hasard a déjà attendu 3 minutes, quelle est la probabilité qu'il attende encore 2 minutes de plus ?