Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 27 septembre 2017

EXERCICE 1

Monotonie **(2 points)**

1) $$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{2n+5} - \frac{n-1}{2n+3} = \frac{n(2n+3)-(n-1)(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)}$$
$$= \frac{2n^2+3n-2n^2-5n+2n+5}{(2n+5)(2n+3)} = \frac{5}{(2n+5)(2n+3)}$$

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ (2n+5)(2n+3) \geqslant 15 > 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n > 0$

La suite (u_n) est strictement croissante.

EXERCICE 2

Programmation d'une suite **(5 points)**

1) a) $u_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}, \qquad u_2 = \dfrac{1}{2+1} + \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12}$

$$u_3 = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3+2} + \frac{1}{3+3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{15+12+10}{60} = \frac{37}{60}$$

b) $u_1 = 0,5, \quad u_2 \approx 0,583, \quad u_3 \approx 0,617.$

On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante..

c) Il faut déterminer le signe de la différence entre deux termes consécutifs.

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$u_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)}$$
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{2(n+1)+2n+1-2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{2n+2+2n+1-4n-2}{2(n+1)(2n+1)}$$
$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2(n+1)(2n+1) \geqslant 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n > 0.$
La suite (u_n) est strictement croissante.

2) Cf page suivante.

3) On obtient le tableau

N	1	10	50	100	200	1000
u	0,500	0,669	0,688	0,691	0,692	0,693

Variables : N, I entiers U réel
Entrées et initialisation
  Lire N
  $0 \rightarrow U$
Traitement
  pour I variant de 1 à N **faire**
    $U + \dfrac{1}{N+I} \rightarrow U$
  fin
Sorties : Afficher U

4) a) La croissance de la suite est confirmé.
   b) La suite semble converger vers 0,693

Exercice 3

ROC et somme **(4 points)**

1) Voir le cours.

2) On donne la somme suivante : $S = 2 + 11 + 20 + 29 + \dots 2018$
   a) S est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 9.
   b) Soit N : nombre de termes. On a $N = \dfrac{2018 - 2}{9} + 1 = 225$ termes.
   c) $S = \text{Nbre de termes} \times \dfrac{\Sigma \text{ termes extrèmes}}{2} = 225 \times \dfrac{2 + 2018}{2} = 227\ 250$

Exercice 4

Population d'abeilles **(5 points)**

1) Si l'apiculteur perd 20 % de ses abeilles chaque année, il lui en reste 80 % auquel s'ajoute 2 dizaines de milliers d'abeilles qu'il achète chaque année.

   On a donc $u_{n+1} = 0,8u_n + 2$

2) a) Cf ci-contre.

Variables : N, I entiers U réel
Entrées et initialisation
  Lire N
  $1 \rightarrow U$
Traitement
  pour I variant de 1 à N **faire**
    $0,8U + 2 \rightarrow U$
  fin
Sorties : Afficher U

   b) On obtient le tableau suivant :

n	1	2	5	10	50
u_n	2,800	4,240	7,051	9,034	10,000

   c) La suite semble converger vers 10.

3) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 = 0,8u_n + 2 - 10 = 0,8u_n - 8 = 0,8(u_n - 10) = 0,8v_n$

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0,8$, la suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0,8$ et de 1$^{\text{er}}$ terme $v_0 = u_0 - 10 = -9$.

   b) $v_n = v_0 q^n = -0,9 \times 0,8^n$ donc $u_n = v_n + 10 = 10 - 9 \times 0,8^n$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$ car $-1 < 0,8 < 1$, par somme et produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10$.

Le nombre d'abeilles va se stabiliser vers 10 dizaines de milliers. L'objectif de l'apiculteur sera donc atteint.

EXERCICE 5

Suite homographique **(4 points)**

1) a) $u_1 = \dfrac{2u_0}{2+3u_0} = \dfrac{4}{2+6} = \dfrac{1}{2}$ et $u_2 = \dfrac{2u_1}{2+3u_1} = \dfrac{1}{2+\dfrac{3}{2}} = \dfrac{2}{7}$

b) La suite (u_n) n'est pas arithmétique car :

$$\begin{cases} u_1 - u_0 = \dfrac{1}{2} - 2 = -\dfrac{3}{2} \\ u_2 - u_1 = \dfrac{2}{7} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{14} \end{cases} \Rightarrow u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$$

La suite (u_n) n'est pas géométrique car :

$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{4}{7}$ donc $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$

2) a) $v_{n+1} - v_n = 1 + \dfrac{2}{u_{n+1}} - 1 - \dfrac{2}{u_n} = \dfrac{2(2+3u_n)}{2u_n} - \dfrac{2}{u_n} = \dfrac{2+3u_n-2}{u_n} = 3$

$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_{n+1} - v_n = 3,$

la suite (v_n) est donc arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $v_0 = 1 + \dfrac{2}{u_0} = 2$.

b) $v_n = v_0 + nr = 2 + 3n$.

$v_n = 1 + \dfrac{2}{u_n} \Leftrightarrow \dfrac{2}{u_n} = v_n - 1 \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{2} = \dfrac{1}{v_n - 1} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{2}{v_n - 1} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{2}{1+3n}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + 3n = +\infty$ par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{1+3n} = 0$.

La suite (u_n) tend vers 0.