Correction du devoir du lundi 7 janvier 2019

EXERCICE I

Équations, inéquation, limites **(8 points)**

1) a) $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln x$

Conditions : $\begin{cases} 6x-2>0 \\ 2x-1>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{3} \\ x>\dfrac{1}{2} \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow D_f=\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

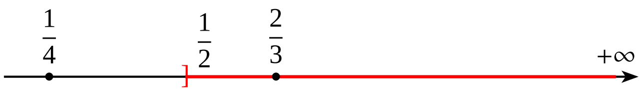
$x \in D_f$, la fonction ln étant monotone sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$\ln(6x-2)(2x-1)=\ln x$

$(6x-2)(2x-1)=x+5 \Leftrightarrow 12x^2-6x-4x+2=x$

$12x^2-11x+2=0 \Rightarrow \Delta=121-96=25=5^2$

$x_1=\dfrac{11+5}{24}=\dfrac{2}{3}\in D_f$ et $x_2=\dfrac{11-5}{24}=\dfrac{1}{4}\notin D_f$



$S=\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

b) $\ln(-x-1)=\ln\left(\dfrac{-x-10}{x+2}\right)$ Conditions :

$\begin{cases} -x-1>0 \\ \dfrac{-x-10}{x+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \\ \text{(tableau de signes)} \end{cases} \Rightarrow D_f=]-10\,;-2[$

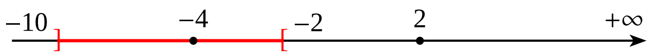
x	$-\infty$	-10		-2	$+\infty$
$\dfrac{-x-10}{x+2}$	$-$	0	$+$	‖	$-$

$x \in D_f$, la fonction ln étant monotone sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$-x-1=\dfrac{-x-10}{x+2} \Leftrightarrow (-x-1)(x+2)=-x-10$

$-x^2-2x-x-2=-x-10 \Leftrightarrow -x^2-2x+8=0$

$\Delta=4+32=36=6^2 \Rightarrow x_1=\dfrac{2+6}{-2}=-4\in D_f$ et $x_2=\dfrac{2-6}{-2}=2\notin D_f$



$S=\{-4\}$

2) a) $\Delta=16+4=20=(2\sqrt{5})^2 \Rightarrow X_1=\dfrac{4+2\sqrt{5}}{2}=2+\sqrt{5}$ et $X_2=2-\sqrt{5}<0$.

b) α) $e^{2x}-4e^x-1=0$ on pose $X=e^x$ avec $X>0$

L'équation devient $X^2-4X-1=0$, on ne retient que la racine positive :

$X=2+\sqrt{5} \Leftrightarrow e^x=2+\sqrt{5} \Leftrightarrow x=\ln\left(2+\sqrt{5}\right) \Rightarrow S=\left\{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right\}$

β) $(\ln x)^2 - 4\ln x - 1 = 0$ on pose $X = \ln x$.
L'équation devient $X^2 - 4X - 1 = 0$, on retient les deux racines :

$$\begin{cases} X = 2+\sqrt{5} \\ X = 2-\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 2+\sqrt{5} \\ \ln x = 2-\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{2+\sqrt{5}} \\ x = e^{2-\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{e^{2-\sqrt{5}}\,;\, e^{2+\sqrt{5}}\right\}$$

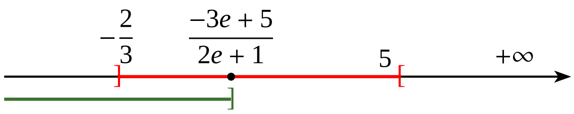
3) a) $\ln(2x+3) \leqslant -1 + \ln(5-x)$

Conditions : $\begin{cases} 2x+3 > 0 \\ 5-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{3}{2} \\ x < 5 \end{cases} \Rightarrow D_f = \left]-\dfrac{3}{2}\,;\,5\right[$

$x \in D_f$, la fonction ln étant croissante sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$$\ln(2x+3) \leqslant \ln\left[e^{-1}(5-x)\right] \Leftrightarrow 2x+3 = e^{-1}(5-x) \Leftrightarrow x(2+e^{-1}) \leqslant -3+5e^{-1} \Leftrightarrow$$

$$x \leqslant \frac{-3+5e^{-1}}{2+e^{-1}} \left(\overset{\times e}{=} \frac{-3e+5}{2e+1} \approx -0.49\right) \Rightarrow S_1 = \left]-\infty\,;\,\frac{-3e+5}{2e+1}\right]$$



$$S = S_1 \cap D_f = \left]-\frac{2}{3}\,;\,\frac{-3e+5}{2e+1}\right]$$

b) $(2x-7)\ln(x+1) \geqslant 0$ condition $x > -1$ donc $D_f =]-1\,;+\infty[$

Valeurs frontières : $\begin{cases} 2x-7=0 \\ \ln(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=7 \\ x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ x = 0 \end{cases}$

Comme les fonctions ln et $x \mapsto x+1$ sont toutes deux croissantes

x	-1		0		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$2x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-7)\ln(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-1\,;\,0] \cup \left[\dfrac{7}{2}\,;+\infty\right[$

4) Les deux formes sont des formes indéterminées. On transforme les deux fonctions :

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x} \times \dfrac{\ln x}{x}$ or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

  Par somme et produit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

- $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+3}{2x+1}\right) \overset{\div x}{=} \ln\left(\dfrac{1+\frac{3}{x}}{2+\frac{1}{x}}\right)$ or $\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{3}{x} = 1 \\ &\lim_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x} = 2 \end{aligned}\right\}$ Par quotient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$

  $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} \ln x = -\ln 2$ par composition $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\ln 2$

Exercice II

Projectile dans un fluide **(6 points)**

1) a) $f'(x) = b - \dfrac{2}{1-x} = \dfrac{-bx+b-2}{1-x}$.

b) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -bx+b-2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{b-2}{b}$.

$\forall x \in [0;1[, \quad 1-x > 0 \quad \Rightarrow \quad$ signe de $f'(x) =$ signe de $-bx+b-2$.

$\dfrac{b-2}{b} = 1 - \dfrac{2}{b}$ or $\; b \geqslant 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < \dfrac{2}{b} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant 1 - \dfrac{2}{b} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \dfrac{b-2}{b} < 1$.

On a alors le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{b-2}{b}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{b-2}{b}\right)$	$\searrow$	$\Vert$

La fonction f admet un maximum sur $[0\,;1[$.

2) a) $\forall x \in [0;1[, \quad f(x) \leqslant 1,6 \quad \Rightarrow \quad f\left(\dfrac{b-2}{b}\right) \leqslant 1,6$.

$$f\left(\frac{b-2}{b}\right) = b\left(\frac{b-2}{b}\right) + 2\ln\left(1 - \frac{b-2}{b}\right) = b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right) = b - 2 + 2\ln 2 - 2\ln b = g(b).$$

Comme $b \geqslant 2$, on doit donc avoir $\forall x \in [2\,;+\infty[, \quad g(x) \leqslant 1,6$.

b) $g'(x) = 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x-2}{x}$. Or $\; x \geqslant 2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-2}{x} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad g'(x) \geqslant 0$.

La fonction g est donc croissante sur I.

c) Calculons $g(2)$ et la limite de g en $+\infty$.

$g(x) \overset{x \geqslant 2}{=} x\left(1 - 2 \times \dfrac{\ln x}{x}\right) - 2 + 2\ln 2$. De $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, on en déduit :

par somme $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - 2 \times \frac{\ln x}{x} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\}$ par produit et somme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $g(2) = 0$

Sur I, la fonction g est continue (car dérivable), monotone (croissante) et 1,6 est compris entre $g(2)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 1,6$ admet une unique solution α.

Calculons : $g(10) = 8 + 2\ln 2 - 2\ln 10 \approx 16,18$ donc $\alpha \in [2; 10]$.

Par dichotomie on trouve : $5,691 \leqslant \alpha \leqslant 5,692$ en rentrant la fonction $(g - 1,6)$.

d) Comme la fonction g est croissante, $g(x) \leqslant 1,6 \quad \Rightarrow \quad x \in [2\,;\,\alpha] \quad \Rightarrow \quad b \in [2\,;\,\alpha]$

3) f est alors définie par $f(x) = 5,69x + 2\ln(1-x)$ et donc $f'(x) = \dfrac{-5,69x + 3,69}{1-x}$

L'angle θ est défini par le coefficient de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0, c'est à dire :

$$\tan\theta = f'(0) = 3,69 \quad\Rightarrow\quad \theta = \arctan 3,69 \approx 74,8^\circ.$$

Exercice III

Fonction et algorithme **(6 points)**

Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa

1) $f'(x) = 30\left[\dfrac{20(1-x) - 20x(-1)}{(1-x)^2}\right] \div \left(\dfrac{20x}{1-x}\right) = 30 \times \dfrac{20}{(1-x)^2} \times \dfrac{1-x}{20x} = \dfrac{30}{x(1-x)}.$

$\forall x \in]0\,;\,1[,\quad \begin{cases} x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad f'(x) > 0.$ La fonction f est croissante.

2) $f(x) = a \quad\Leftrightarrow\quad 30\ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right) = a \quad\Leftrightarrow\quad \ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right) = \dfrac{a}{30} \overset{\text{ln monotone}}{\Leftrightarrow} \dfrac{20x}{1-x} = e^{\frac{a}{30}} \quad\Leftrightarrow$

$20x = e^{\frac{a}{30}} - xe^{\frac{a}{3}} \quad\Leftrightarrow\quad x(20 + e^{\frac{a}{30}}) = e^{\frac{a}{30}} \quad\Leftrightarrow\quad x = \dfrac{e^{\frac{a}{30}}}{20 + e^{\frac{a}{30}}}$

- $a = 20,\quad x_1 = \dfrac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}} \approx 0,09$
- $a = 120,\quad x_2 = \dfrac{e^4}{20 + e^4} \approx 0,73$

Comme f est croissante $20 \leqslant f(x) \leqslant 120 \quad\Rightarrow\quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \quad\Rightarrow\quad x \in [0,09\,;\,0,73]$
Le diamètre du tronc entre 20 ans et 120 ans, varie entre 9 cm et 73 cm

Partie B

1) On a $x = 0,27$ donc son âge vaut : $f(0,27) \approx 60$ ans.

Par approximation affine, sa hauteur est au milieu d'un arbre de 50 ans et 70 ans soit

$$h = \frac{11,2 + 15,6}{2} = 13,4 \text{ m}$$

2) a) La vitesse de croissante maximale est de 0,25 qui a lieu entre 85 ans et 95 ans.

L'intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure est [85 ; 95]

Remarque : Avec la correction du continue on trouve l'intervalle [82,5 ; 97,5].

b) Un arbre de diamètre de 70 cm a : $f(0,7) \approx 115,3$ ans qui n'est pas cohérant pour avoir la meilleure qualité de bois.