Contrôle de mathématiques

Programmé le Mercredi 11 décembre 2019
à rendre en devoir pour le lundi 6 janvier 2020

EXERCICE 1

Question de cours : limites de la fonction exponentielle **(2 points)**

1) Étudier les variations de la fonction $f(x) = e^x - x$. On ne demande pas les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2) En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

EXERCICE 2

Équation, inéquation **(2 points)**

On justifiera chaque étape des résolutions suivantes.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $e^2 \times e^{x^2} = e^{2x^2+x}$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $e^{2x-3} \geqslant e^{3x}$

EXERCICE 3

Limite et dérivée. **(3 points)**

Soit le fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

1) En mettant en évidence les limites de référence si besoin, déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2) a) Déterminer la dérivée de la fonction f.
   b) En déduire le tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4

Taux de vasopressine **(9 points)**

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à $2,5\ \mu$g/mL. Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante : $f(t) = 3t \times e^{-\frac{t}{4}} + 2$ avec $t \geqslant 0$.
où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en μg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en **minute**) écoulé après le début d'une hémorragie.

1) a) Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?
   b) Justifier que douze **secondes** après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.

c) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. On pourra poser $T = \frac{t}{4}$.
Interpréter ce résultat.

2) On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
Vérifier que pour tout nombre réel t positif : $f'(t) = \frac{3}{4}(4-t)\,e^{-\frac{t}{4}}$.

3) a) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
b) À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?
Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

4) a) Démontrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0\,;\,4]$ telle que $f(t_0) = 2,5$.
En donner un encadrement à 10^{-3} près de t_0 dont on donnera le nombre d'itérations avec l'algorithme de dichotomie.
b) On admet qu'il existe une unique valeur $t_1 \in [4\,;\,+\infty[$ vérifiant $f(t_1) = 2,5$.
On donne une valeur approchée de t_1 à 10^{-3} près : $t_1 \approx 18,930$.

Déterminer pendant combien de temps, à la seconde près, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 μg/mL dans le sang.

5) a) Déterminer l'équation la tangente T_0 en $t = 0$ de la courbe $\mathscr{C}_f$
b) Tracer sur le repère donné en annexe la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente T_0 ainsi que les asymptotes éventuelles.

EXERCICE 5

Chaînette **(4 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Calculer $f(-x)$. Que peut-on conclure sur $\mathscr{C}_f$
2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
3) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet un unique solution α dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$, puis justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$ et que ces solutions sont opposées.

Nom :

Prénom :

Annexe de l'exercice 4

À rendre avec la copie